தி. பா. நி. (க. வெ.) வரிசை எண்—474

உயர் விசையியல்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(...ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

ரா. மகாதேவன்,
கணிதப் பேராசிரியர்,
மாநிலக் கல்லூரி,
சென்னை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—July, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 474

© Tamil Nadu Text Book Society

ADVANCED MECHANICS

R. MAHADEVAN

Price Rs. 5-25

'Published by The Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by

Muthukumaran Press,
Madras-1.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்

(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின் மூன்றுண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி. ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968 ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.) 1969 ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரண மாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத் தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறு வதற்கு மதுரைப் பல்கலைக் கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'உயர் விசையியல்' என்ற இந் நூல் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 474 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 509 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக் கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப் படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

பாகம் 1—திரவ நிலையியல்

1. அழுத்தம் (Pressure) ... 1

2. சமதளப் பரப்பின்மேல் திரவ அமுக்கம்
(Liquid thrust on plane surface) ... 13

3. அமுக்க மையம் (Centre of pressure) ... 17

4. வளைதலத்தின்மீது திரவ அமுக்கம்
(Thrust on curved surface) ... 28

5. மிதக்கும் பொருள்கள் (Floating bodies) ... 43

6. மிதக்கும் பொருள்களின் சமநிலை உறுதிப்பாடு
(Stability of floating bodies) ... 50

பாகம் 2—நிலையியல்

1. விசைகளின் சமநிலை (Forces in equilibrium) ... 65

2. சங்கிலியம் (Catenary) ... 86

3. கற்பித வேலைத் தத்துவம் (Principle of
virtual work) ... 103

4. உத்திரங்களின் உள்ளுறு அமுக்கம்
(Stresses in Beams) ... 115

பாகம் 3—இயக்கவியல்

பக்கம்

1. இயக்கவியலின் அடிப்படைகள்
(Fundamentals of dynamics) ... 133

2. துகளின் நேர்கோட்டியக்கம்
(Rectilinear motion of a particle) ... 148

3. மைய விசைகள், மைய ஒழுக்குகள்
(Central forces, Central orbits) ... 171

4. விறை பொருள் இயக்கவியல்
(Dynamics of a rigid particle) ... 183

மேற்கோள் நூல்களின் பட்டியல் ... 206

கலைச்சொற்கள் ... 207

பாகம் 1

திரவ நிலையியல்

1. அழுத்தம்

(PRESSURE)

1-1. தோற்றுவாய்

நிலையியல், இயக்கவியல் எனும் நூல்களில், பொருள்களின் மேல் விசைகள் செயல்படும்போது, அவற்றின் நிலை, அல்லது இயக்கம் எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதைப் பற்றிக் கூறப்படுகிறது. அங்கு விறைபொருளின் இலக்கணத்தைக் கூறினோம். துகள் தொகுதியின் மேல் புறவிசைகள் செயல்படும் போது, தொகுதியில் உள்ள ஏதேனும் இரு துகள்களின் ஒன்றற்கொன்றுள்ள தூரமோ, நிலையோ மாறாது எனக் கூறினோம்.

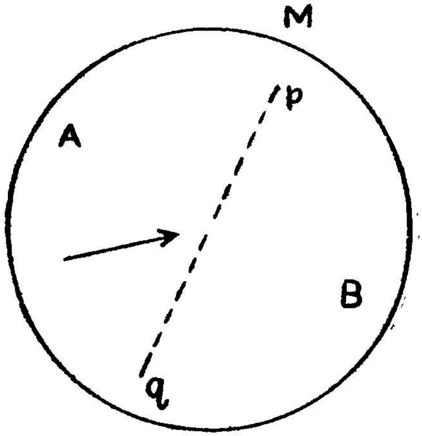
விசைகள் செயல்படும்போது, உள்ளுறு விசைகள், துகள் தொகுதியில் ஏற்படும். ஆனால் விறைபொருள் தொகுதியில், இரு துகள்களுக்கிடையே ஏற்படும் விசைகள், நியூட்டனின் மூன்றாவது விதிப்படி ஒன்றற்கொன்று எதிராகவும் துகள்களைச் சேர்க்கும் கோட்டின்மேலும், அளவில் சமமாகவும் அமையும் எனக் கூறினோம். ஆகவே, உள்ளுறு விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

இப்போது இன்னொரு வகைத்துகள் தொகுதியைக் காண்போம். அத்தகைய தொகுதி திரவம் (fluids) எனப்படும்.

1-2. திரவப்பொருளின் வரையறை

M என்ற ஒரு துகள் தொகுதியில் pq எனும் சிறு சமதளத்தைக் கொள்வோம். துகள் தொகுதியை இந்தத் தளம் A, B எனும் இரு பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது. A-லுள்ள துகள்களினால் pq எனும் தளத்தில் ஒரு அழுக்கவிசை (stress)

ஏற்படுகிறது. இது தளத்திற்குக் குத்தாக இருக்கவேண்டுமென்பதில்லை. தளத்திற்குக்குக் குத்தான இதன் பிரிவு (component) செங்குத்து அமுக்கம் (Normal stress) எனப்படும். தளத்தில் அமையும் பிரிவு வெட்டு அமுக்கம் (Shearing force) எனப்படும்.



படம் 1.

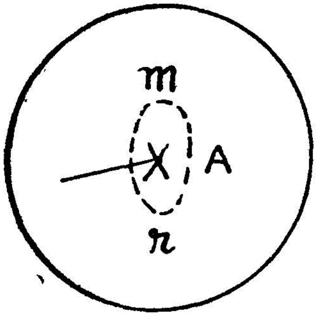
துகள் தொகுதியினுள் எவ்வாறேனும் ஒரு சிறு தளமெடுக்க. அதன்மேல் அமுக்கம் செங்குத்து அமுக்கமாக மட்டும் இருந்தால், அத்தகைய துகள் தொகுதி திரவம் எனப்படும்.

இதைத் திரவ நிலையியல், திரவ இயக்கவியல் இவற்றின் எடுகோள் (Postulate) எனக் கூறலாம். இதன் அடிப்படையில் விசைகளின் விளைவுகள் விவரிக்கப்படும். இத்தகைய திரவப் பொருளை 'குறையிலா திரவம்' (Perfect fluid) எனவும் கூறுவர். இந்நூலில் 'திரவம்' என்றே நாம் கூறுவோம்.

1-3. அழுத்தம் (Pressure)

ஒரு திரவப் பொருள் தொகுதியுள் A என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. அதைச்சுற்றி நுண்ணிய பரப்புடைய சிறு சம தளத்தைக் கொள்க. இதன் பரப்பு δS ஆகுக. தளத்தின் மேல் உள்ள அமுக்கம் δF ஆகுக. எடுத்துக்காட்டாக, $\delta S = \cdot 001$ ச. அங்.

அழுக்கம் ·02 ராத்தல் ஆல்லது பவுண்டுநிறை (Pounds weight);



படம் 2.

என்ருல் அழுக்க வீதம் $= \frac{\delta F}{\delta S}$

$= \frac{\cdot 02}{\cdot 001} =$ 20பவுண்டுநிறை/ ச. அங்.

இந்த விகிதம் $\frac{\delta F}{\delta S}$ தளத்தில் புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறும். ஆனுல் A ஐச் சுற்றிய நுண்பரப்பு, A எப்போதும் உள்ளிருக்குமாறு பூச்சியத்தை அணுகினல் அழுக்க வீதமும் ஓர் எல்லையை அணுகும்.

கணிதக் குறியீட்டில் $\underset{\delta S \to 0}{Lt} \frac{\delta F}{\delta S} \to P.$

P என்பது புள்ளி A-ல் உள்ள அழுத்தம் (Pressure at the Point A) எனப்படும். அழுத்தத்தை, அலகுப் பரப்புக்கு எத்தனை விசை அலகு எனக் கூறப்படுகிறது.

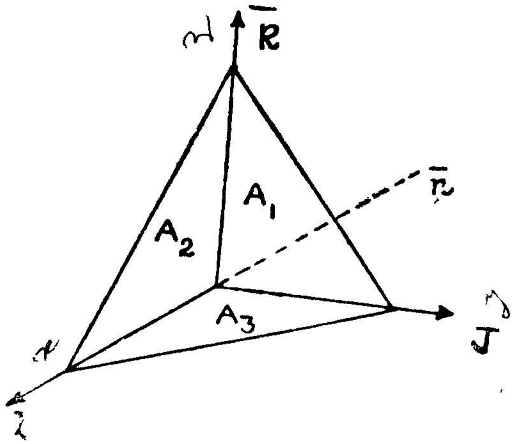
திரவப் பொருளில் A எனும் புள்ளியைச்சுற்றி நுண்பரப்புத் தளம் பலவாருக அமையலாம். அப்போது A ஐச் சுற்றிப் பல்வேறு தளம் அமைக்க, $\frac{dF}{dS}$-ன் மதிப்பு தளத்திற்குத்தளம் மாறுபடுமா எனக் கேள்வி எழலாம். குறையிலாத் திரவப் பொருளில் தளம் எத்திசையில் அமையினும், $\frac{dF}{dS}$ அதாவது A என்ற புள்ளியில் உள்ள அழுத்தம் மாறுபடாது எனக் காட்டுவோம்.

1-4. தேற்றம் 1: குறையிலாத் திரவத்தில் ஒரு புள்ளியில் உள்ள அழுத்தம் எல்லாத் திசைகளிலும் ஒரே மதிப்புடையதாகும்.

நிருபணம்

ஒன்றற்கொன்று குத்தாக உள்ள x, y, z அச்சுகளைக் கொள்க. திரவத்தில் இந்த x, y, z அச்சுகளுக்கு இணையாகப் புள்ளியைச்சுற்றி மூன்று விளிம்புகள் உள்ள ஒரு நுண்ணிய நான்முகியைக் கொள்க. சாய்ந்த பக்கத்தின் பரப்பு A ஆகுக.

yz, zx, xy தளங்களுக்கு இணையான பக்கங்களின் பரப்புகள் A_1, A_2, A_3 ஆகுக. x, y, z அச்சுகளின் திசையில் அலகு



படம் 3.

வெக்டர்கள் முறையே $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ ஆகுக. A எனும் பக்கத்திற்கு வெளியே குத்தாகச் செல்லும் திசையில் அலகு வெக்டர் $\bar{n}$ ஆகுக. இந்தப்பக்கத்திற்கு எதிர் முனையிலிருந்து குத்துயரம் h ஆகுக.

$$\therefore \quad A_1 = A\, \bar{n}\cdot\bar{i} \qquad A_2 = A\, \bar{n}\cdot\bar{j} \qquad A_3 = A\bar{n}\cdot\bar{k}$$

[xy தளத்தில் Aயின் குத்து வீழல் A_3 ஆனதால் $A_3 = A\cdot\bar{n}\bar{k}$ இது போன்று மற்றவையும்.]

நான்முகியின் கொள்ளளவு $= \frac{1}{3} Ah$.

A_1, A_2, A_3, A என்ற தளங்களில் திரவத்தின் அழுத்தங்கள் முறையே p_1, p_2, p_3, p ஆகுக. திரவத்தின் அடர்த்தி ρ, வெளி விசை அலகுத்திணிவிற்கு (Force per unit mass) $\bar{f}$ ஆகுக; நான்முகியில் உள்ள பொருள் தொகுதியின் முடுக்கம் $\bar{a}$ ஆகுக.

தலம்பாட்டின் தத்துவப்படி (By D'Alembart's Principles)

$$p_1 A_1 \bar{i} + p_2 A_2 \bar{j} + p_3 A_3 \bar{k} - p A \bar{n} + \frac{1}{3}Ah\rho\, (\bar{f} - \bar{a}) = 0$$

$\therefore$ A_1, A_2, A_3 இவற்றிற்குப் பிரதியிட

$$p_1 A (\bar{n} \cdot \bar{i}) \, \bar{i} + p_2 A (\bar{n} \cdot \bar{j}) \, \bar{j} + p_3 A (\bar{n} \cdot \bar{k}) \, \bar{k} - p A \bar{n} + \frac{1}{3} A h \rho (f - \bar{a}) = 0$$

A ஆல் வகுத்து $h \to 0$ எனும்படிக்கொண்டால்

$$p_1 (\bar{n} \cdot \bar{i}) \, \bar{i} + p_2 (\bar{n} \cdot \bar{j}) \, \bar{j} + p_3 (\bar{n} \cdot \bar{k}) \, \bar{k} = p \, \bar{n}$$

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ எனும் வெக்டர்களால் புள்ளிப்பெருக்கல் தனித் தனியாகச் செய்ய $p_1 = p$; $p_2 = p$; $p_3 = p$ எனவருகிறது.

[$\bar{i} \cdot \bar{i} = 1$ $\bar{j} \cdot \bar{j} = 1$ $\bar{k} \cdot \bar{k} = 1$ என்பது கவனிக்கவும்.]

புள்ளியைச் சுற்றி நான்முகி எவ்வாறேனும் அமையலாம். ஆதலால் அழுத்தம், அந்தப்புள்ளியில் எல்லாத்திசைகளிலும் ஒரே மதிப்புடையதாகும்.

குறிப்பு 1 : இயங்கும் திரவத்திற்கும், நிலைத்திரவத்திற்கும் இத் தேற்றம் பொருந்தும் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு 2 : அமுக்கம், தளம் எவ்வாறு அமையினும், அதற்குக் குத்தாக உள்ளது எனும் வரையறையிலிருந்து வந்த விளைவு மேற்சொன்ன தேற்றம் என்பதுவும் குறிப்பிடத்தக்கது.

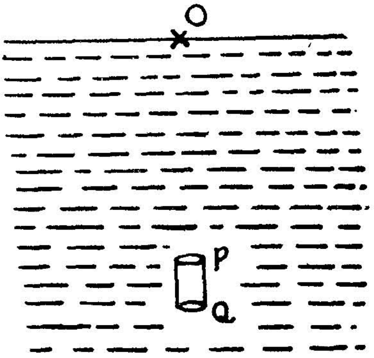
1-5. நீரியல் திரவமும், காற்றியல் திரவமும் (Liquids and Gases)

திரவப் பொருளின் கனபரிமாணம் அதன் மேல் உள்ள அமுக்கத்தினுல் மாருதிருந்தால், அது நீரியல் திரவம் (incompressible fluid or liquid). காற்று போன்ற பொருள் தொகுதியின் கனபரிமாணம் அமுக்கத்தினுல் மாறும். அத்தகைய திரவம் காற்றியல் பொருள் (gases) அல்லது வாயுக்கள் எனப்படும். இந்நூலில் சீரான அடர்த்தியுள்ள, புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படும் நீரியல் பொருள் தொகுதியின் நிலையியலை மட்டும் ஆராய்வோம்.

1-6. புவியீர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் அழுத்தம்

நிலையாக இருக்கும் திரவத்தின் மேல் செயல்படும் புறவிசை புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் ஆகுக. திரவத்தினுள் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாகுக. அதற்கு மேல் உள்ள ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதன் ஆழம் z ஆகுக. P-க்கு நேர் கீழ், Pஐ அடுத்து உள்ள புள்ளி Q ஆகுக. $PQ = \delta z$ ஆகுக. PQவை

அச்சாகவுர், நுண் பரப்புள்ள கிடை வெட்டுமுகமுள்ள ஒரு நுண்ணுருளையைக் கொள்ளவும். வெட்டுமுகப்பரப்பு α என்றால்,



படம் 4.

உருளையில் அடங்கும் திரவத்தின் கன அளவு $\alpha \delta z$. திரவத்தின் அடர்த்தி P-ல் ρ ஆகுக.

உருளை கொண்டுள்ள திரவத்தின் மேல் செயல்படும் விசைகளைக் காண்போம். P எனும் புள்ளியில் அழுத்தம் p என்றால், Q எனும் புள்ளியில் அழுத்தம் $p + \delta p$ ஆகும்.

(i) அமுக்கம் $p\,\alpha$ நேர் கீழாக.

(ii) அமுக்கம் $(p + \delta p)\,\alpha$ நேர்மேலாக.

(iii) $g\rho\,\alpha\delta z$ திரவ நிறை நேர் கீழாக.

திரவம் நிலையாக உள்ளதால் நிலைக்குத்து திசையில் மேலாகவுள்ள (Vertical Components) விசை கூடுதல் $= 0$

$$\therefore \quad (p + \delta p)\alpha - p\alpha - g\rho\,\alpha\delta z = 0$$

$$\therefore \quad \delta p \cdot \alpha = g\rho\,\alpha\,dz$$

$$\therefore \quad \delta p = g\rho\,\delta z.$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{dz} = g\rho$$

[உருளையின் வளைதலத்தில் அமுக்கம் இருப்பினும், அவை யாவும் கிடைத்திசையிலேயே உள்ளன.]

மேலே கூறிய வகைக்கெழுச்சமன்பாடு, புவியீர்ப்பு விசையால் மட்டும் நிலையாக உள்ள திரவத்தில், வெவ்வேறு புள்ளிகளில் உள்ள அழுத்தத்தை, புள்ளிகளின் ஆழத்தின் சார்பாகத் தருகிறது. இது அழுத்தச் சமன்பாடு (Equation of Pressure) எனப்படும்.

1-7. சமபடித்தான திரவம் (Homogeneous liquid)

திரவத்தின் அடர்த்தி எங்கும் ஒரு போன்று 'ρ' ஆகுக. அப்போது ρ மாறிலி (அதாவது ஆழத்தின் சார்பலன் அல்ல).

$$\therefore \int dp = \int g \rho \, dz$$

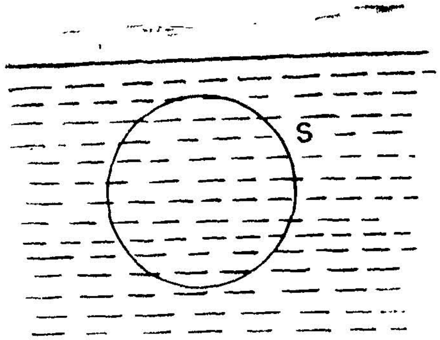
$$\therefore p = g\rho z + C$$

$\therefore$ சம அழுத்தம் உள்ள புள்ளிகள் யாவும் ஒரே ஆழத்தில் உள்ளன எனக் காண்கிறோம். அதாவது சம அழுத்தத் தளங்கள் கிடைச்சம தளங்களாகும்.

1-8. பொது அழுத்தச் சமன்பாடு (General Equation of Pressure)

பல புற விசைகளின் ஆதிக்கத்தின் கீழ் நிலையாக இருக்கும் திரவத்தொகுதியில், பல்வேறு இடங்களில் அழுத்தத்தைத் தரும் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

S எனும் புறப்பரப்பால் எங்கும் சூழப்பட்டுள்ள திரவத் தொகுதியைக் கொள்க. அதன் கொள்ளளவு V ஆகுக.



படம் 5.

உள்ளே ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அடர்த்தி ஒவ்வொரு மதிப்புடையதாக இருக்கும். dV எனும் நுண் அளவுள்ள இடத்தில்

அடர்த்தி ρ ஆகுக. ஓர் அலகுத் திணிவுக்கு, புறவிசை $\bar{f}$ எனும் படி திரவம் முழுவதும் செயல்படும் புற விசையாகுக.

$$\therefore \text{ புற விசை } = \int_V \bar{f}\,\rho\,dV$$

S எனும் மேல் பரப்பில் உள்நோக்கிக் குத்தாகவுள்ள அழுத்தம் p ஆகுக. வெளிக்குத்து அலகு வெக்டர் $\bar{n}$ என்றால்,

அழுத்தத்தின் வெக்டர் தொகை $-\oint_S \bar{n}\,p\,dS$. இவ்விரண்டு விசைத்தொகைகளும் சேர்ந்து பூச்சியமாகும் [திரவத் தொகுதி சம நிலையில் உள்ளதால்].

$$\therefore \int_V \bar{f}\,\rho\,dv - \oint_S \bar{n}\,p\,dS = 0$$

ஆனால் வெக்டர் நுண் கணிதத்திலிருந்து

$\oint_S \bar{n}\,p\,dS = \int_V \nabla p\,dV$ என அறிவோம்.

$$\therefore \int_V \bar{f}\,\rho\,dV - \int_V \nabla p\,dV = 0$$

$$\therefore \int_V (\bar{f}\,\rho - \nabla p)\,dV = 0$$

இந்தச் சமன்பாடு S எத்தகையதாயினும் பொருந்தவேண்டுமாதலால்

$$\bar{f}\,\rho - \nabla p = 0$$

$$\therefore \boxed{\nabla p = \rho \bar{f}}$$

இதுவே பொது அழுத்த வகைக் கெழுச் சமன் பாடாகும். (வெக்டர் குறியீட்டில்).

1-9. புற விசைகளின் ஆதிக்கத்தில் திரவம் நிலையாயிருக்க நியதி

பொது அழுத்தச் சமன்பாடு

$$\nabla p = \rho \bar{f}$$

ஆனால் $\nabla \times \nabla p = 0$

$$\nabla \times (\rho \bar{f}) = 0$$

$\therefore \quad \nabla \rho \times \bar{f} + \rho \nabla \times \bar{f} = 0$

$\bar{f}$ ஆல் புள்ளிப்பெருக்கல் செய்ய,

$\bar{f} \nabla \rho \times \bar{f} + \bar{f} \rho \nabla \times \bar{f} = 0$

ஆனால் $\bar{f} \cdot \nabla \rho \times \bar{f} = 0$

$\therefore \quad \bar{f} \rho \nabla \times \bar{f} = 0$

ρ திசையிலியாதலால் $\bar{f} \cdot \nabla \times \bar{f} = 0$

1-10. கார்டீசிய உறுப்புகளில் மேல் கூறிய முடிவுகள்

x, y, z அச்சுகளைக் கொள்ள, அவற்றின் திசைகளில் புற விசை $\bar{f}$-ன் பிரிவுகள் X, Y, Z ஆகுக.

$\therefore \quad \nabla p = \rho \bar{f}$-லிருந்து வரும் சமன்பாடு

$$\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k = \rho (Xi + Yj + Zk)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X ; \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y; \frac{\partial p}{\partial z} \rho Z.$$

1-11. திரவ நிலை நியதி

$$\bar{f} \nabla \times \bar{f} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0$$

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) = 0$$

குறிப்பு : வெக்டர் சமன்பாடுகளிலிருந்து வேறு பல கூறு களிலும் இரண்டு சமன்பாடுகளையும் கூறமுடியும்.

புவியீர்ப்பு விசையில் நிலைத்திரவம்

இந்தப் பொது விதியிலிருந்து புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படும் போது அழுத்தச் சமன்பாட்டை வரவழைக்கலாம்.

$\nabla P = \rho \bar{g}$ ($\bar{g}$ என்பது அலகு திணிவுப் பொருளில் செயல் படும் புவியீர்ப்பு விசை). நேர் கீழாக அலகு வெக்டர் $\bar{k}$ எனில் அதாவது z அச்சு நேர் கீழ் நிலைக்கோடானால் $\bar{g} = g = \bar{k}$

$$\therefore \quad \nabla p = \rho g \bar{k} = \rho g \nabla z = \nabla (\rho g z)$$

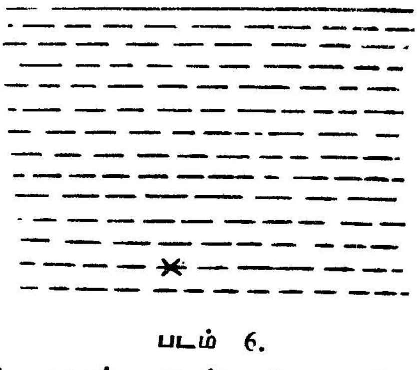
$$\therefore \quad p = \rho g z + C$$

அல்லது

கார்டீசியச் சமன்பாட்டில் $\dfrac{dp}{dz} = \rho g \quad \therefore \quad p = \rho g z + C$

1-12· திரவ மட்டத்தளம் (Free surface of the liquid under gravity)

புவியீர்ப்பு விசையின் ஆதிக்கத்தின் கீழ் நிலையாக இருக்கும் திரவத்தில் ஒரு புள்ளியில் உள்ள அழுத்தம் p-ஐ

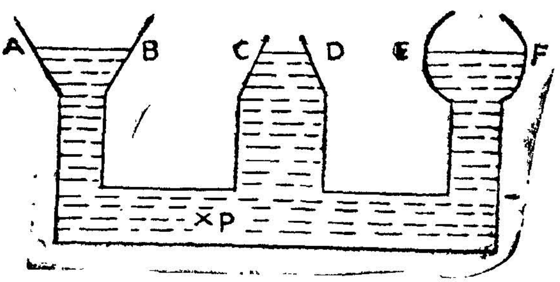


படம் 6.

$p = g \rho z + C$ எனும் சமன்பாடு தருகிறது என்றேம். இங்கு z என்பது O எனும் புள்ளியிலிருந்து P-ன் ஆழத்தைக் குறிக்கிறது. $z = 0$ ஆகும்போது $P = 0$ எனும்படி O-வை எடுத்துக்கொள்வோம். அப்போது $C = 0$. அப்போது அழுத்தச் சமன்பாடு $p = g \rho z$ ஆகும். இங்கு $z = 0$ என்பது திரவ அழுத்தம் பூச்சியமாக இருக்கும் மட்டத் தளத்தைக் குறிக்கிறது. இதைத் திரவ மட்டத்தளம் என்போம்.

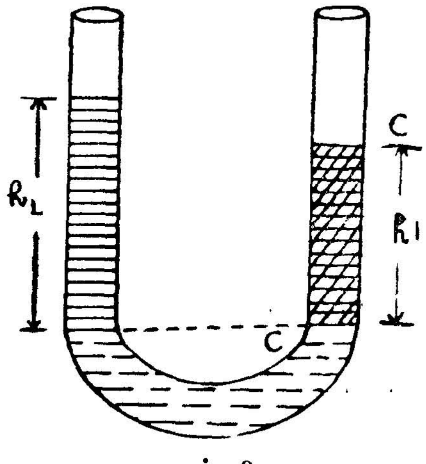
குறிப்பு : சாதாரண நீர்மட்டத்தின் மேல் காற்றின் அழுத்தமும் உண்டு. அந்த அழுத்தம் π எனக் கொண்டால் $p = g\rho z + \pi$ என வரும். ஆனல், வரும் கணக்குகளில் காற்றின் அழுத்தத்தைக் கணக்கில் எடுக்காமல் திரவத்தால் மட்டும் ஏற்படும் அழுத்தத்தையே கவனிப்போம்.

குறிப்பு: திரவம் ஒன்றற்கொன்று தொடர்புடைய பல இடங்களில் தேங்கி நின்றல், எல்லா இடத்திலும் திரவமட்டம்



படம் 7.

ஒரே கிடைத்தளத்தில் இருக்கும். P எனும் புள்ளி திரவத்தில் எங்கு இருப்பினும் அங்குள்ள அழுத்தம், இந்தத் திரவமட்டத்திலிருந்து அதன் ஆழத்துடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.



படம் 8.

இந்தத் தத்துவத்தைப் பயன்படுத்தி ஒன்றுடன் ஒன்று கலக்காத இரு திரவங்களின் அடர்த்தியை ஒப்பிட முடியும்.

ஒரு U குழலில் இரண்டு திரவங்களையும் விட, அவையிரண்டையும் BC எனும் மட்டத்தளம் பிரிக்கும். இந்தப் பிரிக்கும் தளத்தில் இரண்டிலும் ஏற்படும் அழுத்தம் சமமாகும். திரவமட்டங்களிலிருந்து ஆழங்கள் h_1, h_2 ஆகுக. அவற்றின் அடர்த்தி ρ_1 ρ_2 ஆகுக.

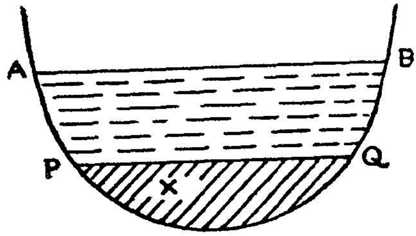
$$\therefore \quad \text{அழுத்தம் } p = g\,\rho_1\,h_1 = g\,\rho_2\,h_2$$

$$\therefore \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

அடர்த்தி குறைவாக உள்ள திரவத்தின் உயரம் அதிகமாக இருக்கும்.

ஒன்றுடன் ஒன்று கலக்காத பல திரவங்கள்

இவற்றை ஒரு பாத்திரத்தில் கொள்வோம்.



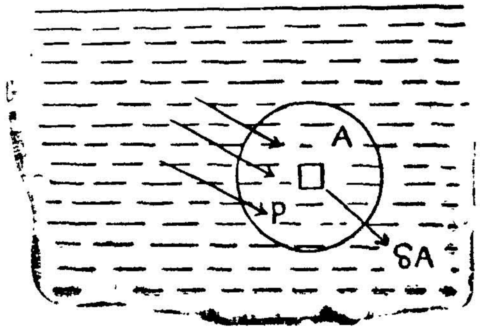
படம் 9.

புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்பட்டுத் திரவங்கள் சம நிலையில் இருப்பதால், சம அழுத்தத்தளம் கிடைத்தளமாகும். கீழ் திரவத்தின் மட்டம் PQ ஆகுக. இதன் அடர்த்தி ρ_1. மேல் திரவத்தின் மட்டம் AB ஆகுக. இதன் அடர்த்தி ρ_2. X எனும் புள்ளியின் ஆழம் PQ-லிருந்து h_1. PQ-ன் ஆழம் AB-லிருந்து h_2 என்றால்

$$X\text{-ல் அழுத்தம் } p = g\,[\rho_1\,h_1 + \rho_2\,h_2].$$

2. சமதளப் பரப்பின்மேல் திரவ அழுக்கம்

புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்பட, நிலையாக இருக்கும் சீரான அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் A எனும் பரப்புடைய சமதளம் அமையட்டும். சமதளப் பரப்பில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் திரவ அழுத்தம் பரப்பிற்குக் குத்தாக இருக்கும். ஆகவே, இவை யாவும் இணை விசைகள் போன்றதாகும். ஆனால், புள்ளிக்குப் புள்ளி அழுத்த மதிப்பு மாறும்.



படம் 10.

சமதளத்தின் மேல் இத்தகைய அழுக்கங்களின் கூடுதல் மொத்த அழுக்கம் (Thrust) ஆகும்.

2-1. மொத்த அழுக்கத்தைக் கணக்கிட

(பரப்பில் P என்பது ஒரு புள்ளியாகுக. அங்குள்ள திரவ அழுத்தம் p ஆகுக. P ஐச் சுற்றி δA எனும் நுண் பரப்பைக்

கொள்வோம். நுண் பரப்பின் மீதுள்ள நுண் அழுக்கம் $p \, \delta A$. இவ்வாறு பரப்பு A முழுவதும் உள்ள நுண் அழுக்கத்தின் தொகை $\int_A p \delta A$ எனும் பரப்பு நுண் தொகை (Surface Integral) ஆகும்.

தளம் திரவ மட்டத்துடன் θ கோணச்சாய்வில் உள்ளது எனக் கொள்வோம். தளம் A, திரவமட்டத்தை வெட்டும் நேர்கோட்டை x அச்சாகவும், தளம் A-ல், அமைவதாகவும் x-அச்சுக்குக் குத்தாகவுமுள்ள ஏதேனும் ஒரு கோட்டை y-அச்சாகவும் கொள்வோம். P-ன் கூறுகள் (x, y) ஆகுக. P ஐச் சுற்றிய நுண் பரப்பு $\delta x \, \delta y$ பக்கமுள்ள செவ்வகமெனின், $\delta A = \delta x \, \delta y$. திரவமட்டத்திலிருந்து P-ன் ஆழம் $y \sin \alpha = z$. ஆனால் $p = g\rho z = g\rho y \sin \alpha$.

$$\therefore \text{ மொத்த அழுக்கம் } = \int_A P \, \delta A$$

$$= \int\int g \rho \, y \sin \alpha \, dx \, dy$$

$$= g \rho \sin \alpha \int\int y \, dx \, dy$$

ஆனால் பரப்பு A-ன் புவியீர்ப்பு மையத்தின் கூறு $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\text{ஆனால் } \bar{y} = \frac{\int\int y \, dx \, dy}{\int\int dx \, dy} = \frac{\int\int y \, dx \, dy}{A}$$

$$\int\int y \, dx \, dy = A \bar{y}$$

$$\therefore \text{ மொத்த அழுக்கம் } = g \rho \sin \alpha \, A \bar{y}$$

$$= g \rho A \bar{y} \sin \alpha$$

புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் திரவ மட்டத்திலிருந்து $\bar{z}$ ஆனால் $\bar{y} \sin \alpha = \bar{z}$ ஆகும்.

$$\therefore \left.\begin{array}{l}\text{மொத்த அழுக்கம்} \\ \text{(Total Thrust)}\end{array}\right\} = g\rho A \bar{z}$$

(A தளத்தின் பரப்பு; $\bar{z}$ பரப்பின் புவியீர்ப்பு மையத்தின் ஆழம் என மீண்டும் கூறுகிறோம்.)

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஓர் அரைவட்டத்தகடு, அதன் விட்டம் திரவமட்டத்தில் அமையுமாறு நிலைத்தளத்தில் திரவத்தில் வைக்கப்படுகிறது. வட்ட ஆரம் a; திரவ அடர்த்தி ρ என்றால், தகட்டின் மேல் மொத்த அழுக்கம் என்ன ?

சூத்திரம்

மொத்த அழுக்கம் $= g\rho A\bar{z}$

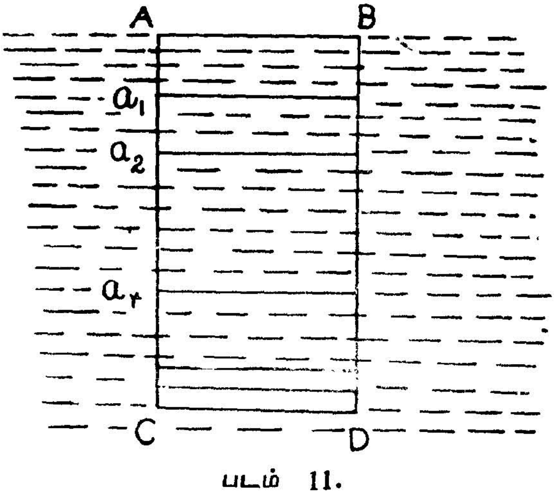
இங்கு $A = \frac{1}{2}\pi a^2$; $\bar{z} = \frac{4a}{3\pi}$

$$\therefore \text{ மொத்த அழுக்கம் } = g\rho \cdot \frac{\pi a^2}{2} \cdot \frac{4a}{3\pi}$$

$$= \underline{2 g\rho a^3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு செவ்வகத்தகடு நிலைத்தளத்தின் அதன் அகலம் திரவ மட்டத்தில் அமையுமாறு வைக்கப்படுகிறது. அகலத்திற்கு



படம் 11.

இணையாக எங்கெங்கு நேர்கோடுகள் வரைந்து n சமபாகங்களாகப் பிரித்தால், ஒவ்வொரு பாகத்திலும் மொத்த அழுக்கம் சமமாக இருக்கும்?

AB எனும் அகலம் திரவமட்டத்தில் உள்ளது. நீளம் $AC = l$ ஆகுக. r th நேர்கோடு AB-யிலிருந்து x ஆழத்தில் இருக்கட்டும்.

∴ அப்போது n பாகத்திலுள்ள அமுக்கத்திற்கும், $ABCD$-க்கு உள்ள அமுக்கத்திற்கும் உள்ள விகிதம் $= \frac{r}{n}$

r பாகங்கள் கொண்ட பகுதியின் புவிமையின் ஆழம் $= \frac{x}{2}$

அதன் பரப்பு $= x \cdot AB$

∴ அதன்மேல் அமுக்கம் $= g\rho \cdot x \cdot AB \cdot \frac{x}{2}$

$$= g\rho \frac{x^2}{2} AB$$

$ABCD$-ன் மேல் அமுக்கம் $= g\rho \frac{l^2}{2} AB$

$$\therefore \frac{x^2}{l^2} = \frac{r}{n} \qquad \therefore x = \sqrt{\frac{r}{n}}\, l$$

∴ கோடுகள் AB-லிருந்து முறையே

$$\sqrt{\frac{1}{n}}\, l; \quad \sqrt{\frac{2}{n}}\, l; \quad \sqrt{\frac{3}{n}}\, l$$

எனும் தூரத்தில் வரையப்படவேண்டும்.

3. அமுக்க மையம்

(CENTRE OF PRESSURE)

சம தளப்பரப்பின் மேல் செயல்படும் அமுக்கம் பரப்பெங்கும் குத்தாக இருப்பதால், மொத்த அமுக்கம், எங்குச் செயல்படுகிறது எனக் காணவேண்டும். சமதளப்பரப்பின் மேல் மொத்த அமுக்கம் செயல்படும் புள்ளி, பரப்பின் அமுக்க மையம் (Centre of pressure) எனப்படும்.

3-1. அமுக்க மையம் காண

பரப்பில் ஏதேனும் இருகுத்துக்கோடுகளை x, y அச்சுக்களாகக் கொள்க. பரப்பில் P எனும் புள்ளியில் அழுத்தம் p ஆகுக அதன் கூறுகள் (x, y) : அதைச்சுற்றிய நுண் பரப்பு δA ஆகுக. δA-ன் மேல் அமுக்க விசை $p\delta A$; ஆகவே பரப்பு முழுவதும் உள்ள அமுக்கத்தின் தொகு விசை $\iint p\,\delta A$. இது செயல்படும் புள்ளி $(\bar{x}, \bar{y})$ ஆகுக.

$\therefore$ y, x அச்சுகளைச் சுற்றிச் சுழல்திறன் கண்டு சமன்படுத்த

$$\bar{x}\iint p\delta A = \iint px\,\delta A$$

$$\bar{y}\iint p\delta A = \iint py\,\delta A$$

இவ்வாறு அமுக்க மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ காண முடியும்.

நடைமுறையில் x, y அச்சுகளைக் கணக்கிடுவது எளிதாக அமையும் வண்ணம் எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும்.

சீரான அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில், பரப்பு திரவ மட்டத்தை வெட்டும் கோட்டை x அச்சாகவும், அதற்குக் குத்தாகப் பரப்பின்

அமையும் கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்க. பரப்பு, கிடைத் தளத்துடன் θ சாய்வில் இருந்தால், புள்ளியின் ஆழம் $y \sin \theta$.

$$\therefore \quad p = g \rho y \sin \theta$$

$$\therefore \quad \bar{x} \iint g \rho y \sin \theta \delta A = \iint g \rho y \sin \theta \, x \delta A$$

$$\therefore \quad \bar{x} \iint y \, \delta A = \iint x y \, \delta A$$

இதேபோன்று

$$\bar{y} \iint y \, \delta A = \iint y^2 \, \delta A$$

குறிப்பு 1 : அமுத்தமையத்தின் கூறுகள் θ வைச்சார்ந்து இல்லையாதலால், x அச்சைச் சுற்றிப் பரப்பு சுழன்றாலும், அதன் கூறுகள் மாறுவதில்லை எனக்காண்கிறோம்.

குறிப்பு 2 : பரப்பின் பு.மை.யின் y கூறு h ஆகுக.

$$\therefore \quad Ah = \iint y \, \delta A$$

அல்லாமலும் $\iint y^2 \, \delta A = Ak^2$ [நிலை திருப்புதிறன்]

இங்கு $\bar{y} = \dfrac{\iint y^2 \, \delta A}{\iint y \, \delta A} = \dfrac{A k^2}{A h} = \dfrac{k^2}{h}$ [k என்பது x அச்சைச்சுற்றிய சுழலாரை.]

[பரப்பு நிலைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டால் அ.மை (அமுக்க மையம்)-ன் ஆழம் $\dfrac{k^2}{h}$ எனக் காண்க.]

குறிப்பு 3 : பரப்பின் பு.மை. வழி திரவமட்டத்திற்கு இணையான கோட்டைப்பற்றிய சுழலாரை K என்றால்,

$$k^2 = K^2 + h^2$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{K^2 + h^2}{h} = \frac{K^2}{h} + h$$

∴ அ.மை.ன் ஆழம் பு·மை·-ன் ஆழத்தை விட அதிகம் என்பதை அறிகிறோம் பு·மை.-ன் ஆழம் அதிகமாகும்போது அமுக்க மையம். புவிஈர்ப்பு மையத்தை நெருங்குகிறது.

[∵ $\frac{K^2}{h}$-ன் மதிப்பு குறைவதால்.]

குறிப்பு 4 : திரவமட்டத்தை வெட்டும் கோட்டிற்குக் குத்தாக உள்ள ஒரு கோட்டிற்கு இரு புறமும் பரப்பு ஒரு போன்று அமைந்தால், அமுக்க மையம் இந்தக் கோட்டில் அமையும். ஆகவே, அதன் y கூறு மட்டும் கண்டால் போதும்.

குறிப்பு 5 : திரவத்தில் உள்ள பரப்புக்குப் பதிலாக m_1, m_2, m_3 ... எனும் திணிவுள்ள துகள்களை $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$ ... என்ற இடங்களில், பரப்புடன் சமச்சுழல் திறன் (Equimomental) உள்ளதாகக் கொள்ளலாம். அப்போது இரண்டின் பு·மையமும், எந்தக்கோட்டைச்சுற்றிய திருப்புதிறனும் ஒன்றே. [இதுதான் சமச்சுழல் திறனின் வரையறை.]

அ·மை ($c.p$)-யின் கூறுகள் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்றால்

$$\bar{x} = \frac{\iint xy\,\delta A}{\iint y\,\delta A} \qquad \bar{y} = \frac{\iint y^2\,\delta A}{\iint y\,\delta A}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma m_1 x_1 y_1}{\Sigma m_1 y_1} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma m_1 y_1^2}{\Sigma m_1 y_1}$$

$$= \frac{\Sigma (m_1 y_1) x_1}{\Sigma (m_1 y_1)} \qquad \bar{y} = \frac{\Sigma (m_1 y_1) y_1}{\Sigma (m_1 y_1)}$$

∴ அமுக்க மையம் காண :

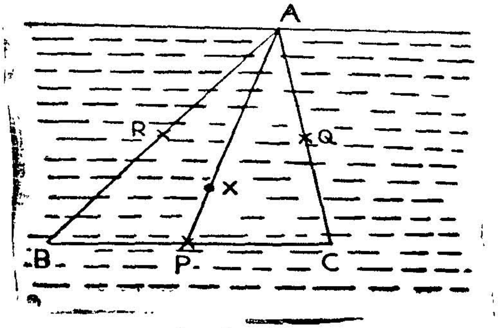
ஒரு பரப்புக்குப் பதிலாக, (i) சமச் சுழல் திறனுள்ள துகள் தொகுதியைக் கொள்க.

(ii) துகள்கள் இருக்குமிடங்களில், அவற்றின் திணிவுகளைப் போல் ‘ஆழம்’ மடங்குள்ள துகள்களைக் கொள்க.

(iii) இவ்வாறுள்ள துகள்களின் புவியீர்ப்பு மையம், பரப்பின் அமுக்க மையமாகும்.

எடுத்துக் காட்டு 1

ABC என்ற முக்கோணத்தகடு, *A* என்ற முனை திரவ மட்டத்தில் இருக்குமாறும், *BC* கிடையாக இருக்குமாறும், ஒரு நிலைத்தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் அமுக்கமையத்தைக் காண்க.



படம் 12.

BC-ன் ஆழம் h ஆகுக.

BC, *CA*, *AB*-ன் நடுப்புள்ளிகள் P, Q, R ஆகுக.

பரப்பின் திணிவு M என்றால், முக்கோணமும், P, Q, R ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{M}{3}$ திணிவுள்ள துகள்களும் சமச்சுழல் திறன் உள்ளவையாகும். அமுக்க மையம் காண, P-ல் $\frac{Mh}{3}$ எனும் துகளும், Q, R ஒவ்வொன்றிலும் $\frac{M}{3} \cdot \frac{h}{2}$ திணிவுள்ள துகள்களும் கொள்க.

இவற்றின் பு•மை. *AP*-ல் X எனும் இடத்தில் $AX = \frac{3}{4} AP$ எனும் இடத்தில் உள்ளதென்பதைக் காணலாம்.

$\therefore$ X என்பது அமுக்க மையமாகும்.

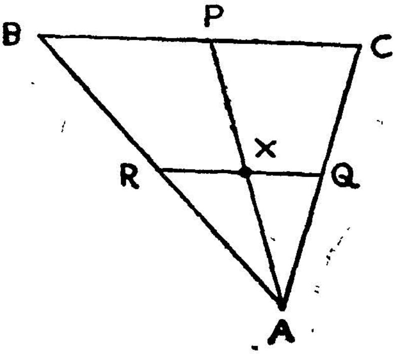
எடுத்துக் காட்டு 2

மேற்கூறிய தகட்டின் பக்கம் *BC* திரவ மட்டத்தில் இருந்தால் அமுக்க மையம் காண்க.

P, Q, R ஆகிய நடுப்புள்ளிகளின் $\frac{M}{3}, \frac{M}{3}, \frac{M}{3}$ திணிவுள்ள துகள்களைக் கொள்க.

இவற்றின் ஆழங்கள் முறையே

$O, \frac{h}{2}, \frac{h}{2}$;



படம் 13.

∴ அமுக்க மையம், P, Q R என்னும் இடங்களில் $O, \frac{Mh}{6}$, $\frac{Mh}{6}$ எனும் துகள்களின் புமை ஆகும் (அதாவது RQ-ன் நடுப் புள்ளி). அதாவது அதன் ஆழமும் $\frac{h}{2}$ ஆகும். இது AP-ன் நடுப்புள்ளியும் ஆகும்.

எடுத்துக் காட்டு 3

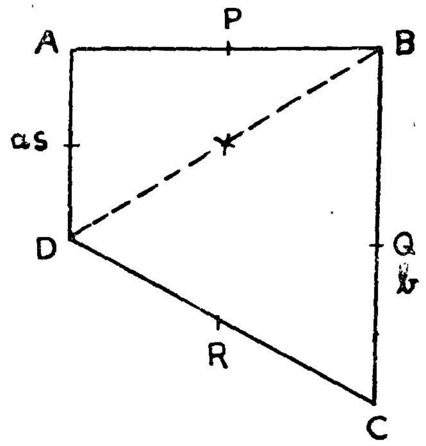
$ABCD$ என்ற நாற்கரத்தில் AD, BC எனும் பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே a, b ஆகவும், அவை AB-க்குக் குத்தாகவு முள்ளன. BC எனும் பக்கம் திரவமட்டத்தில் இருக்குமாறும், நாற்கரம் நிலைத் தளத்தில் அமையுமாறும் திரவத்தினுள் வைக்கப் படுகிறது. அதன் அமுக்கமையின் ஆழம் $\frac{l(a^2 + b^2)(a + b)}{4(a^2 + ab + b^2)}$ - என நிறுவுக.

BDஐச் சேர்க்கவும் (படம் 14). AB-ன் நீளம் $6l$ ஆகுக. பரப்பிற்குப் பதிலாக சமச் சுழல்திறன் உள்ள தொகுதியை முதலில் கொள்வோம்.

ABD-ன் திணிவு $= 3al\,w$ (w அடர்த்தி)

BCD-ன் திணிவு $= 3bl\,w$

$P, Q, R\ S, T$ முறையே $AB.\ BC.\ CD,\ DA,\ BD$ இவற்றின் நடுப் புள்ளிகள். இங்குள்ள துகளின் திணிவு, அதன் ஆழம்,



படம் 14.

திணிவு × ஆழம் உள்ள துகள், அதன் ஆழம் இவற்றைப் பட்டியலில் தருவோம்.

புள்ளி	திணிவு	ஆழம்	திணிவு × ஆழம்	திணிவு × ஆழம்²
P	alw	0	0	0
Q	blw	$\frac{b}{2}$	$\frac{b^2 lw}{2}$	$\frac{b^2 lw}{4}$
R	blw	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{blw(a+b)}{2}$	$\frac{blw(a+b)^2}{4}$
S	alw	$\frac{a}{2}$	$\frac{a^2 lw}{2}$	$\frac{a^2 lw}{4}$
T	$(a+b)lw$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a(a+b)lw}{2}$	$\frac{a^2(a+b)lw}{4}$

$$\therefore \frac{lw}{2}\{b^2 + a^2 + (a+b)^2\}\bar{x} = \frac{lw}{4}[a^3 + b^3 + (a+b)(a^2 + ab + b^2)]$$

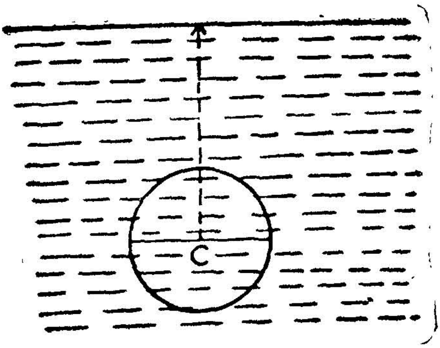
$$\therefore \bar{x} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4(a^2+ab+b^2)}$$

எடுத்துக்காட்டு 4

ஒரு வட்டத் தகடு, அதன் மையம் திரவமட்டத்திலிருந்து 'd' ஆழம் இருக்குமாறு நிலைத்தளத்தில் வைக்கப்படுகிறது. அதன் ஆரம் a என்றால், அழுக்க மையத்தின் ஆழத்தைக் காண்க.

ஆழத்தைத் தரும் சூத்திரம் :

$$\text{ஆழம்} = \frac{k^2}{h}$$



படம் 15.

k^2 என்பது பரப்பு திரவ மட்டத்தைச் சுற்றும் கோட்டைப் பொறுத்து பரப்பின் சுழலாரை (Radius of gyration). k என்பது பு. மையத்தின் ஆழம்.

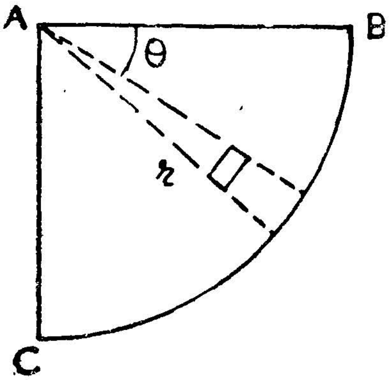
$\therefore h = d$

$$k^2 = \frac{a^2}{4} + d^2 \left[\text{விட்டத்தைப் பற்றிய சுழலாரை} = \frac{a^2}{4}.\right]$$

$$= \frac{a^2 + 4d^2}{4}$$

$$\therefore \text{அ. மையத்தின் ஆழம்} = \frac{a^2 + 4d^2}{4d}$$

$$= \frac{a^2}{4d} + d$$



படம் 16.

எடுத்துக்காட்டு 5

ஒரு கால் வட்டப் பரப்பு அதன் ஓர் ஆரம் திரவ மட்டத்திலிருக்குமாறு நிலைத் தளத்தில் திரவத்தில் உள்ளது. அமுக்க மையத்தின் நிலையைக் காண்க.

AB எனும் ஆரம் திரவ மட்டத்தில் உள்ளது. அதை *x* அச்சாகக் கொள்ளவும். *AC* எனும் ஆரத்தை *y* அச்சாகக் கொள்ளவும்.

அமுக்க மையம் $(\bar{x}\ \bar{y})$ என்றால்

$$\bar{x} = \frac{\int\int xy\,\delta A}{\int\int y\,\delta A} \qquad \bar{y} = \frac{\int\int y^2\,\delta A}{\int\int y\,\delta A}$$

$$\int\int y\,\delta A = A\,y_g \left[y_g \text{ என்பது புமை-ன் } y \text{ கூறு} = \frac{4a}{3\pi} \right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \cdot \frac{4a}{3\pi} = \frac{a^3}{3}$$

$$\int\int xy\,\delta A = \int\int r\cos\theta\, r\sin\theta\, dr \cdot r\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{a} r^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \quad \left[\because \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{a^4}{8}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{a^4}{8} \div \frac{a^3}{3} = \frac{3a}{8}$$

$$\bar{y} = \frac{\int\int y^2 \delta A}{\int\int y \delta A}$$

$\int\int y^2 \, \delta A =$ பரப்பின் நிலைமச் சுழல்திறன் (ABஐச் சுற்றி)

$$= A \frac{a^2}{4} = \frac{\pi a^4}{16}$$

$$\int\int y \, \delta A = A \cdot \frac{4a}{3\pi} \qquad \therefore \quad \bar{y} = \frac{3\pi a}{16}$$

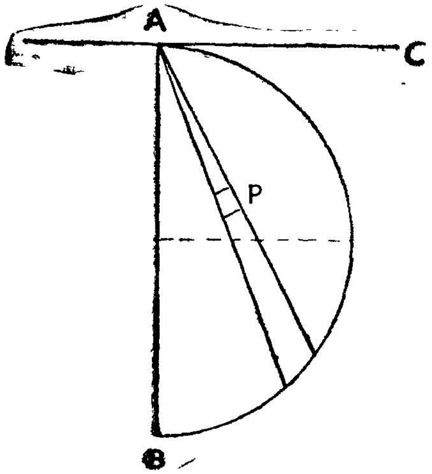
$\therefore$ அமுக்க மையத்தின் கூறுகள் $= \left(\frac{3a}{8}, \frac{3\pi a}{16}\right)$

எடுத்துக்காட்டு 6

ஓர் அரை வட்டப் பரப்பு அதன் விட்டம் நிலைக் கோட்டில் இருக்குமாறும், நுனி, திரவமட்டத்தில் இருக்குமாறும் திரவத்தினுள் அமைகிறது. அதன் அமுக்க மையத்தின் நிலை காண்க.

AB விட்டம் என்றால் அதை y அச்சாகக் கொள்வோம். AC எனும் தொடுகோடு திரவமட்டத்தில் உள்ளது. அது x அச்சு.

P ஏதேனும் புள்ளி. $AP = r$; $\hat{BAP} = \theta$.



படம் 17.

$$\bar{x} = \frac{\iint xy\,\delta A}{\iint y\,\delta A} \qquad \bar{y} = \frac{\iint y^2\,\delta A}{\iint y\,\delta A}$$

$$\iint y\,\delta A = A\,y_g. \quad \text{இங்கு } y_g = a;\ A = \frac{\pi a^2}{2}.$$

$$\therefore \quad \iint y\,\delta A = \frac{\pi a^3}{2} \quad (x = \gamma \sin\theta;\ y = \gamma\cos\theta)$$

$$\iint xy\,\delta A = \iint \gamma^2 \cos\theta \sin\theta\, \gamma\, \delta\theta\, \delta r$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} \gamma^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{16\,a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \cos^5\theta \sin\theta \; d\theta$$

$$= 4a^4 \frac{4\cdot 2}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{2a^4}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{2a^4}{3} \div \frac{\pi a^3}{2} = \frac{4a}{3\pi}$$

$\int\int y^2 \, \partial A =$ நெடுங்கோடு AC-ஐச் சுற்றிய நிலைம திருப்புதிறன்

$$= A\,\frac{5a^2}{4}$$

$$\int\int y \, \partial A = A.\,a.$$

$$\therefore \; \bar{y} = A\,\frac{5a^2}{4} \div Aa = \frac{5a}{4}$$

$\therefore$ அழுக்க மையம் $= \left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{5a}{4}\right)$

4. வளைதலத்தின் மீது திரவ அமுக்கம்
(THRUST ON CURVED SURFACE)

திரவத்தில் மூழ்கியுள்ள சமதளப் பரப்பின்மீது திரவ அமுக்கத்தின் அளவை எவ்வாறு கணக்கிடுவது என்பதையும், மொத்த அமுக்க விசை, செயல்படும் அழுத்தமையத்தை எவ்வாறு காண்பது என்பது பற்றியும் படித்தோம் திரவத்தில் மூழ்கியோ, அல்லது திரவ அமுக்கம் செயல்படுமாறோ உள்ள வளைதலப் பரப்பில் அமுக்கத்தின் தொகு விசையைக் காணும் வகையை இங்கு விவரிப்போம்.

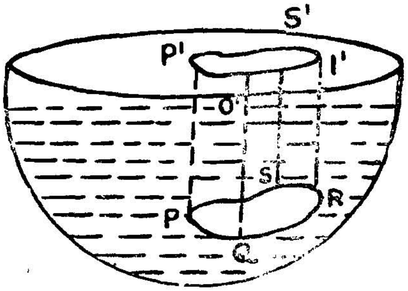
இத்தகைய வளைதலம் முப்பரிமாண வெளியில் பரவியிருப்பதாலும், அமுக்கம் தலமெங்கும் அதற்குக் குத்தாக இருப்பதாலும், ஒன்றற்கொன்று குத்தான மூன்று திசைகளில் அமுக்கம் பிரிவுகளின் கூடுதலைக்காணவேண்டும். ஒரு திசையை மேல் நோக்கும் நிலைக்கோடாகக் கொள்வோம். மற்றிரு திசைகளைக் கிடைத்தளத்தில் கொள்வோம். இம்மூன்று திசைப் பிரிவுகள் ஒரு புள்ளியில் சந்தித்தால், அவற்றின் தொகு விசையைக் காண முடியும்.

4-1. வளைதல அமுக்கத்தின் நிலைக்குத்துப் பிரிவைக்காண

வளைதலப்பரப்பின் சுற்றுவரை $PQRS$ ஆகுக. இந்த வரையின் ஒவ்வொரு புள்ளி மேலும் திரவமட்டத்திற்கு நிலைக்குத்துக்கோடுகள் வரைக. இவை திரவமட்டத்தை $P'Q'R'S'$, எனும் வளைவரையில் சந்திக்கின்றன. $P'Q'R'S'$, $PQRS$ இவையிடையே உள்ள திரவம் சமநிலையில் உள்ளது. இந்தத் திரவப் பகுதியின் மேல் செயல்படும் விசைகள்,

(*i*) திரவப்பகுதியின் எடை நேர் கீழாக.

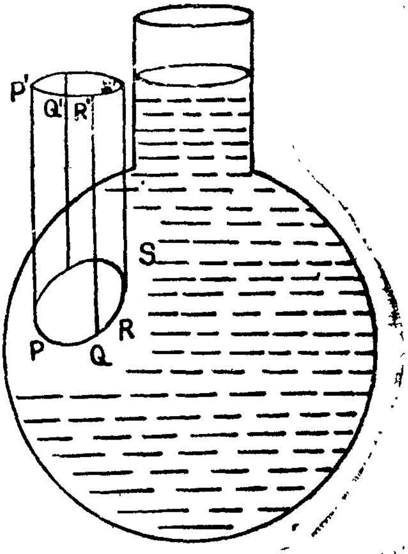
(*ii*) *P Q R S* எனும் வளைதலப் பரப்பின் தாங்கு விசை (Reaction). ஆகவே, இவை இரண்டும் அளவில் சமம். திசையில் எதிர். ஆனால், தாங்கு விசை வளைதலப்பரப்பின் மேல் உள்ள அழுக்கத்திற்கு அளவில் சமமும், திசையில் எதிருமாகும்.



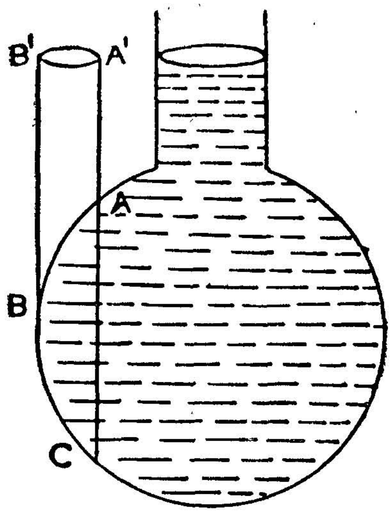
படம் 18.

∴ வளை தலப்பரப்பின் மீதுள்ள அழுக்கத்தின் நிலைக்குத்துப் பிரிவு (Vertical component) = *P Q R S*-ன் பரப்பு தாங்கும் திரவத்தின் எடை (Weight of the super incumbent liquid)

குறிப்பு: படத்தில் காண்பது போல் உள்ள பாத்திரத்தில் உள்ள திரவம் *P Q R S* எனும் வளை தலப் பரப்பில் மேல் அழுத்தும் அழுக்கம் என்ன? இங்கு *P Q R S* எனும் வரைக்கு மேல் திரவம் இல்லை. அழுக்கம் திரவமட்டத்திலிருந்து ஒவ்வொரு புள்ளியில் உள்ள ஆழத்தின் சார்பலனாகும். ஆகவே, திரவமட்டத் தளத்திற்கு முன் போல் நிலைக்கோடுகள் வரைந்து *P'Q'R'S'* எனும் வரை காண்க. இவை யடக்கும் திரவத்தின் எடைக்கு அழுக்கத்தின் குத்துப் பிரிவு சமமாகும். அது மேல் நோக்கிச் செயல்படும்.



படம் 19.



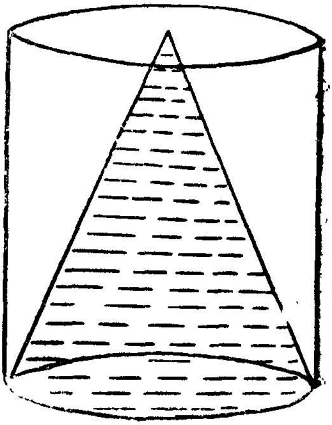
படம் 20.

குறிப்பு 3 : இந்தப் படத்தில் AB என்ற பரப்பில் அமுக்கம் மேல் நோக்கியும் BC என்ற பரப்பில் கீழ் நோக்கியுமாகும். முதல் மேல் நோக்கி அமுக்கப் பிரிவு = $ABB'A'$-ல் உள்ள திரவ எடை; கீழ் நோக்கி உள்ள அமுக்கப் பிரிவு = $BCA'B'$-ல் உள்ள திரவ எடை

∴ ABC எனும் பரப்பில் அமுக்கத்தின் குத்துப் பிரிவு = இரண்டிற்குமுள்ள வித்தியாசம் அதாவது ABC-ல் உள்ள திரவ எடையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு கூம்பின் இம்மிகுறைய திரவம் நிறைந்துள்ளது. (just full). அதன் அடிப்பாகத்தில் திரவ அமுக்கம் என்ன? வளை தலப் பரப்பின் மீதுள்ள அமுக்கத்தின் நிலைக்குத்துப் பிரிவு என்ன?



படம் 21.

தீர்வு

கூம்பின் உயரம் h; அடிப்பக்க ஆரம் r ஆகுக. 'இம்மிகுறைய' என்றதால் திரவ மட்டம் முனையில் உள்ளது எனப் பொருளாகும். அடிப்பக்கத்தில் அமுக்கம் $= g\rho h$.

∴ அடிப்பக்கத்தில் மொத்த அமுக்கம் $= \pi r^2 g \rho h$

(ii) வளைதலப்பரப்பு மீதுள்ள அமுக்கத்தின் குத்துப்பிரிவுகாண

பரப்பின் சுற்று வரை கூம்பின் அடிப்பக்க வட்டமாகும். வளை

தலப்பரப்பு ' தாங்கும் ' திரவ அளவு $= \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 h$$

இதன் எடை $= \frac{2}{3} \rho \pi r^2 h$

∴ அமுக்கத்தின் நிலைக்குத்துப் பிரிவு $= \frac{2}{3} \rho \pi r^2 h$

மாற்று வழி

கூம்பில் உள்ள திரவம் சம நிலையில் உள்ளது. இதன்மேல் செயல்படும் புற விசைகள் (*i*) திரவத்தின் எடை நேர் கீழாக, (*ii*) அடித்தளத்தின் தாங்கு விசை, (*iii*) வளைதலப் பரப்பின் தாங்கு விசை.

(*i*) திரவ எடையின் நேர்கீழ்ப் பிரிவு $= \frac{1}{3} g \rho \pi r^2 h$

(*ii*) அடித்தளத்தின் தாங்கு விசை $= g \rho \pi r^2 h \uparrow$
(ஏனெனில் இது அதன் மேல் உள்ள அமுக்கத்திற்கு எதிர்)

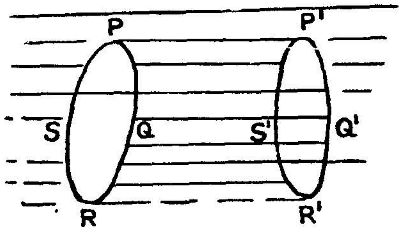
(*iii*) ∴ வளைதலப் பரப்பின் தாங்கு விசை $= \frac{2}{3} g \rho \pi r^2 h$
அப்போதுதான் மூன்றின் கூடுதல் = 0 ஆகும்.

∴ வளைதலப் பரப்பின் மேல் திரவ அமுக்கத்தின் குத்துப் பிரிவு இதற்கு அளவில் சமம். ஆனால் திசையில் எதிர் ; அதாவது மேல் நோக்கிச் செயல்படும்.

∴ இந்த அமுக்கம் $= \frac{2}{3} g \rho \pi r^2 h$ நேர் மேல்.

4-2. வளைதலப்பரப்பின் மீதுள்ள அழுக்கத்தின் கிடைப்பிரிவு (Horizontal component of thrust)

PQRS திரவ அழுக்கம் பெறும் வளைதளப்பரப்பு. இதன்மேல் உள்ள திரவ அழுக்கத்தின் கிடைப்பிரிவைக்காண, பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்தும் கிடைக்கோடுகள் வரைக. இவை ஒரு நிலைத்தளத்தை *P' Q' R' S'* எனும் வளைவரை உள்ளடக்கிய பரப்பில் சந்திக்கட்டும். *PQRS P' Q' R' S'* எனும் பரப்புகளும், கிடைக் கோடுகளும் உள்ளடக்கிய திரவம் சமநிலையில் உள்ளது. இதன் மேல் செயல்படும் கிடை விசைகள் :



படம் 22.

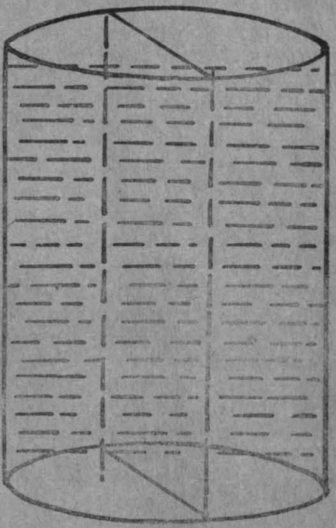
(i) *P Q R S* எனும் வளைதலப்பரப்பின் மேல் செயல்படும் அழுக்கத்தின் கிடைப் பிரிவு.

(ii) *P' Q' R' S'* எனும் சமதளப் பரப்பின் மேல் செயல்படும் அழுக்கம் (இது கிடைத்திசையில் உள்ளது. ஏனெனில் பரப்பு நிலைக்குத்துத் தளத்தில் இருப்பதால்).

இந்த இருவிசைகளும் அளவில் சமம்; திசையில் எதிர் ஆகும். இரண்டாவது விசையின் அளவையும், அது எந்தப் புள்ளிவழிச் செயல்படும் என்பதையும் கணக்கிடும் முறையை முன் அத்தியாயத்தில் கூறியுள்ளோம்.

ஆகவே, வளைதலப்பரப்பின் மேல் செயல்படும் அழுக்கத்தின் கிடைப்பிரிவு இந்தச் சமதளத்தில் மேல் உள்ள அழுக்கத்தின் அளவுக்குச் சரியாகும். ஆனால், திசையில் எதிராகும்.

(எ-டு) 1. ஒரு நேர்வட்ட உருளைப்பாத்திரத்தில் நிறைய திரவம் உள்ளது அதன அச்சு நிலைக்குத்தாக அது வைக்கப் படுகிறது. அச்சு வழிச்செல்லும் நிலைத்தளம் அதன் வளைதலத்தைச் சமமாகப் பிரிக்கிறது. ஒரு பாகத்தின் மீதுள்ள அமுக்கத்தின் தொகுவிளைவை அளவையும் அது எந்தக் கோட்டில செயல்படுகிறதென்பதையும் காண்க.



இங்கு வளைதலத்தின் மீது அழுத்தம் யாவும் கிடைத்தளத்தில் உள்ளது. ஆகவே அமுக்கத்திற்குக் குத்துப்பிரிவு இல்லை.

படம் 23.

வளைதலத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் கிடைக்கோடும் அச்சுவழிச் செல்லும் நிலைத்தளத்தில் சந்திக்கிறது. ∴ அமுக்கத்தின் கிடைப்பிரிவு இந்தத்தளத்தின் மீதுள்ள அமுக்கமாகும்.

உருளையின் உயரம் h; ஆரம் a ஆகுக.

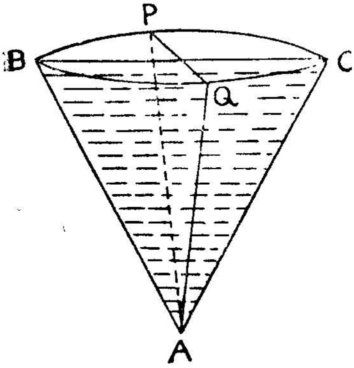
$\therefore$ அமுக்கம் $= g\rho \cdot 2a\, h \cdot \frac{h}{2}$ [$g\rho A\bar{z}$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த].

$= g\rho a h^2$

நிலைத்தளத்தின் அமுக்கமையத்தின் ஆழம் $\frac{R^2}{h}$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த ஆழம் $= \frac{h^2}{3} \div \frac{h}{2} = \frac{2h}{3}$

$\therefore$ அச்சில் அடிப்பாகத்திலிருந்து $\frac{h}{3}$ தூரத்தில் நிலைத்தளத்திற்குக்குத்தாக அதாவது கிடைத்தளத்தில் $g\rho a h^2$ எனும் அளவுடன் அமுக்கம் உள்ளது.

எ-டு. 2. ஒரு கூம்பு வடிவமானபாத்திரம் அதன்முனை கீழாகவும் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் வைக்கப்பட்டு அதில் விளிம்புவரை திரவம் விடப்படுகிறது. அச்சுவழிச் செல்லும் நிலைத்தளம் வளைதலப்பரப்பை இரு சமபாகமாகப் பிரிக்கிறது. ஒரு பாதியில் செயல்படும் அமுக்கத்தின் தொகுவிசையின் அளவையும் அது செயல்படும் திசையையும் காண்க.



படம் 24.

தீர்வு :

APQ என்பது நிலைத்தளம். $APQB$ எனும் பாகத்தில் உள்ள திரவம் சமநிலையில் உள்ளது. இதன் மேல் செயல்படும் விசைகள்,

(i) திரவத்தின் எடை நேர்கீழ் அந்தப் பாகத்தில் உள்ள பு.மை. வழியாக. (இதை $\overline{W}$ என்போம்).

(ii) APQ என்ற சமதளத்தின் மேல் செயல்படும் மற்றப் பகுதி $ACPQ$ எனும் திரவத்தால் ஏற்படும் அமுக்கம் கிடைத்திசையில், சமதளத்தின் அமுக்கமையம் வழி. (இதை $\overline{P}$ என்போம்).

(iii) $ABPQ$ என்றவளைதலப்பரப்பின் தாங்குவிசை(Reaction) இதை $\overline{R}$ என்போம். வளைதலப்பரப்பின் மீதுள்ள திரவ அமுக்கம் இந்தத் தாங்குவிசைக்குத் திசையில் எதிர் ; அளவில் சமம் இதை $\overline{C}$ என்போம்.

அப்போது $\overline{W} + \overline{P} + \overline{R} = 0$

$\therefore \quad \overline{W} + \overline{P} = -\overline{R} = \overline{C}$

என $\overline{C}$ நமக்குக் கிடைக்கிறது.

அல்லாமலும் மூன்று விசைகளும் ஒரு புள்ளியில் சந்திக்க வேண்டும்.

விசைகளைக்காண

(i) $\overline{W}$ = திரவத்தின் எடை

$= \frac{1}{6} \pi r^2 h$ w [w என்பது அலகு கொள்ளளவு : திரவத்தின் எடை $= \rho g$]

(ii) $\bar{P} = APQ$ என்ற முக்கோணத்தின் மேல் மற்ற பாகத்தில் உள்ள திரவ அழுக்கம்

$$= r h \frac{h}{3} w$$

$$= \frac{1}{3} r h^2 w$$ [அழுக்கம் $= g \rho A\bar{z}$ எனும் சூத்திரப்படி]

∴ வளைதலப் பரப்பின் மீதுள்ள

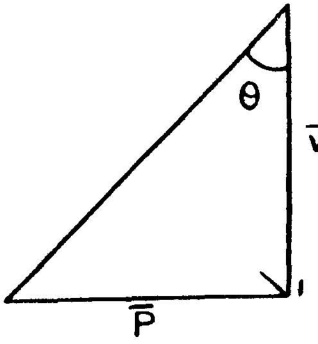
அழுக்கம் $\bar{C} = \bar{W} + \bar{P}$

ஆனதால் $|\bar{C}|^2 = |\bar{W}|^2 + |\bar{P}|^2$

$$= \frac{\pi^2 r^4 h^2 w^2}{36} + \frac{r^2 h^4 w^2}{9}$$

$$= \frac{r^2 h^2 w^2 (\pi^2 r^2 + 4 h^2)}{36}$$

அழுக்க அளவு $= \dfrac{r h w \sqrt{\pi^2 r^2 + 4 h^2}}{6}$



படம் 25.

அழுக்கத்திசை நிலைக் கோட்டுடன் கீழ் நோக்கி θ° சாய்வு

ஆனால் $\tan \theta = \dfrac{P}{W} = \dfrac{r h^2 w}{3} \cdot \dfrac{6}{\pi r^2 h w} = \dfrac{2h}{\pi r}$

[கூம்பின் முனைக்கோணம் $2d$ என்றால் $h = r \cot \alpha$

∴ அழுக்க அளவு $= \dfrac{W}{6} r^3 \sqrt{\pi^2 + 4 \cot^2 \alpha}$; $\tan\theta = \dfrac{2}{\pi} \cot \alpha$]

[மாற்று வழி

முன் சொன்ன முறையில் திரவத்தின் சம நிலைக்குள்ள நியதியைப் பயன்படுத்தி அடிப்படையிலிருந்து தீர்வு கண்டோம்.

வளைதல அமுக்கத்தின் நிலைப்பிரிவு, இடைப் பிரிவுகளை 4·1, 4·2-ல் கூறிய முடிவுகளைப் பயன்படுத்திக் காண்போம்.

(*i*) வளை தலத்தின் மேல் நிற்கும் திரவ எடை $= \frac{1}{6}\pi r^2 h w \downarrow$ = அமுக்கத்தின் நிலைப்பிரிவு.

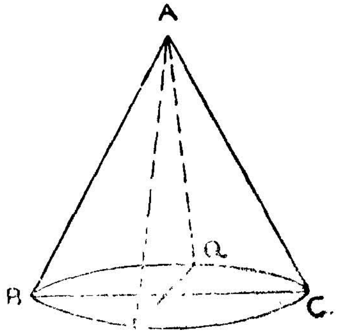
(*ii*) வளைதலப் பரப்பின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்து APQ என்ற நிலைத் தளத்திற்குக் கிடைக்குத்துக் கோடுகள் வரைய அவை முக்கோணம் APQ முழுவதும் உள்ள புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது.

∴ அமுக்கத்தின் இடைப்பிரிவு = இந்தப் பிரிவின் மீதுள்ள திரவ அமுக்கம் $= \frac{w r h^2}{3}$

இவற்றிலிருந்து மற்ற முடிவுகள் முன்போல் காணவும்.]

(எ-டு) 3. மேற்கூறிய கூம்பின் அடிப்பாகம் மூடப்பட்டு திரவத்துடன், முனை மேலாக வைக்கப்பட்டால், வளைதலப்பரப்பின் பாதியின் மேல் உள்ள அமுக்கம் என்ன?

தீர்வு :



படம் 26.

நிலைக்குத்துப் பிரிவு

BPQ எனும் பாதியில் மேல்நிற்கும் திரவ எடை $= \frac{1}{6}\pi r^2 hw$

இது மேல் நோக்கிச் செயல்படும்.

கிடைப்பிரிவு

APQ என்ற முக்கோணப் பிரிவின் மீதுள்ள அமுக்கம்

$$= rhw \, \frac{2}{3} h$$

$$= \frac{2}{3} wrh^2$$

∴ வளைதல அமுக்கத்தின் செயல்படுகோடு நிலைக்கோட்டுடன் θ° சாய்வில் இருந்தால்

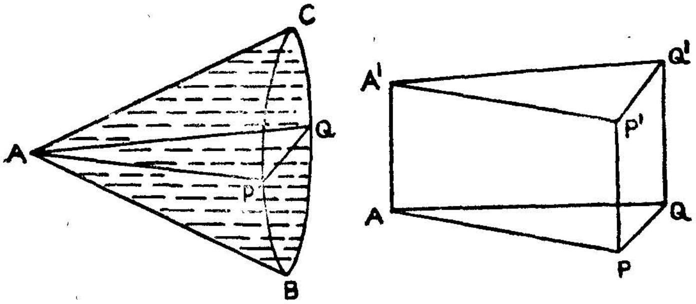
$$\tan\ \theta = \frac{2}{3} wrh^2 \div \frac{1}{6} \pi r^2 hw$$

$$= \frac{2\ wrh^2 . 6}{3\ \pi r^2\ hw}$$

$$= \frac{4}{\pi} \frac{h}{r}$$

(எ-டு) 4. மேற்கணக்கில் உள்ள கூம்பை, கூம்பு அச்சு கிடைத் தளத்தில் அமையுமாறு வைத்தால் கீழ்ப்பாதி வளைதலப் பரப்பில் உள்ள அமுக்கம் என்ன ?

முதல் வழி



படம் 27.

$APQB$ எனும் வளைதலப் பரப்பிலிருந்து திரவமட்டத் தளத்திற்கு, அதாவது C வழி உள்ள கிடைத்தளத்திற்குக் குத்துக் கோடுகள் வரைந்தால் $A'\ P'\ Q'$ எனும் முக்கோணம்வரும். வளைதலத்தின் மேல் நிற்கக்கூடிய திரவம் பட்டகம் APQ $A'\ P'\ Q'$ யிலும் கீழுள்ள அரைக்கோளத்திலும் நிற்கும்.

$$\text{இதன் எடை} = r^2\ hw + \frac{1}{6} \pi r^2\ hw$$

[APQ இன் பரப்பு rh; பட்டக உயரம் r; கொள்ளளவு $= r^2 h$]

∴ வளைதல அமுக்கத்தின் நிலைப்பிரிவு (கீழ்நோக்கி).

$$Y = \left(1 + \frac{\pi}{6}\right) r^2\ hw$$

கிடைப்பிரிவு

வளைதலத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலிருந்து PBQ எனும் நிலைத்தளத்திற்குக் கிடைக்கோடுகள் வரைய அவை PBQ எனும் அரைவட்டத்தில் சந்திக்கின்றன. இதன் மேல் அமுக்கம் காண: அமுக்கம் $= g\rho A\bar{z}$ எனும் சூத்திரம் பயன்படுத்தவும். $g\rho = w$, $A = \frac{1}{2}\pi r^2$. $\bar{z}$ என்பது பு.மை.யின் திரவமட்ட ஆழம். அதாவது C யிலிருந்து ஆழம். $\bar{z} = \left(r + \frac{4r}{3\pi}\right)$

∴ அமுக்கத்தின் கிடைப்பிரிவு

$$X = w\frac{\pi}{2}r^2\left(r + \frac{4r}{3\pi}\right)$$

$$= wr^3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

[X, Y என்ற இருபிரிவுகளும் அச்சின்வழியுள்ள நிலைத்தளத்தில் அமைவதால் அவை சந்திக்கும். அவற்றிற்குத் தொகுவிசை R காணமுடியும்].

இரண்டாவது வழி

கீழ் அரைக்கூம்பில் உள்ள திரவம் கீழ்வரும் விசைகளின் ஆதிக்கத்தில் சமநிலையில் உள்ளது.

(i) அரைக்கூம்பில் உள்ள திரவத்தின் எடை $\bar{W}$ ↓

(ii) கீழ்ப்பாதி வளைதலப்பரப்பின் தாங்குவிசை $\bar{R}_1$.

(iii) மேல் அச்சு வழி உள்ள கிடைத்தளம் APQ-வின் மேல் மற்றப்பாதி திரவத்தின் அமுக்கம் $\bar{P}_1$ ↓

(iv) பாதி அடிப்பக்கம் PBC-யின் தாங்குவிசை $\bar{R}_2$ ←

$$\therefore \quad \bar{W} + \bar{P}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_1 = 0$$

$$W = \frac{1}{6}\pi r^2 hw \downarrow$$

$\bar{P}_1$ காண ($g\rho A\bar{z}$ எனும் சூத்திரப்படி)

APQ-இன் பரப்பு $= A\bar{z}\, rh$.

அதன் பு.மையத்தின் ஆழம் $= r$.

$\therefore \quad P_1 = r^2hw \downarrow$

தளம் PBQ-ன் திரவ அமுக்கம் $\bar{P}_2$ ஆனால்,

$$\bar{R}_2 = -\bar{P}_2 = \frac{1}{2}\pi r^2\left(r + \frac{4r}{3\pi}\right)$$

$$\therefore \quad = wr^3\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)$$

கீழ் வளைதலப்பரப்பின் மீதுள்ள அமுக்கம் $\bar{C}$ எனின்

$$-C = \bar{P}_1$$

$$\therefore \quad \bar{C} = \bar{W} + \bar{P}_1 + \bar{R}_2$$

$\therefore$ C-யின் கீழ் நோக்கி நிலைப்பிரிவு $= \bar{W} + \bar{P}_1$

$$= \left(1 + \frac{\pi}{6}\right)r^3 hw$$

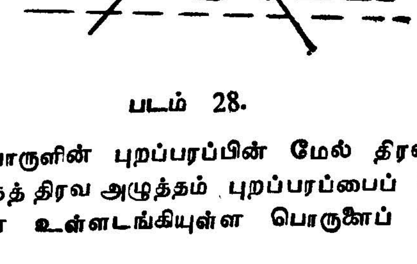
கிடைப்பிரிவு $= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\right)r^3 w$

[இங்கு அடிப்படையிலிருந்து தீர்வுகாண்கிறோம்]

4·3. ஆர்க்கிமிடீசின் கோட்பாடு

திரவத்தில் மூழ்கியுள்ள வளைதலப்பரப்பின் மேல், அதனைச் சுற்றியுள்ள திரவத்தின் அமுக்கம் என்ன என்பதைப்பார்ப்போம்.

A என்ற திண்மப் பொருள் ஒரு திரவத்தில் முற்றிலுமோ அல்லது ஒரு பாகம் மட்டுமாகவோ மூழ்கியிருக்கட்டும்.



படம் 28.

திண்மப் பொருளின் புறப்பரப்பின் மேல் திரவ அழுத்தம் ஏற்படும். இத்தத் திரவ அழுத்தம் புறப்பரப்பைப் பொருத்ததே அன்றி, அதன் உள்ளடங்கியுள்ள பொருளைப் பற்றியதல்ல.

அதே வடிவுடைய வேருெரு பொருள், அதேபோல் மூழ்கியிருந்தால் அமுக்கம் அதே அளவாக இருக்கும்.

ஆகையால் திண்மப்பொருளை நீக்கி அது அடைத்துக் கொண்ட இடத்தைச் சுற்றிலும் உள்ள திரவத்தைப் போன்ற திரவத்தால் நிரப்புவோம். இந்தத் திரவத்தொகுதி சம நிலையில் இருக்கும். இதன் மேல் செயல்படும் விசைகள்:—

(i) திரவத்தின் எடை, அதன் புவியீர்ப்புமையம் வழி நேர் கீழாக.

(ii) திரவத்தொகுதியின் புறப்பரப்பின் மேல் செயல்படும், சுற்றிலுமுள்ள திரவ அமுக்கம்.

இரு விசைகள் செயல்பட திரவத் தொகுதி சமநிலையில் இருப்பதால்

(*i*) இருவிசைகளும் அளவில் சமம்

(*ii*) திசையில் எதிர்

(*iii*) இருவிசைகளும் செயல்படும் கோடு ஒன்றே.

ஆகையால் திரவத்தில் முற்றிலுமோ அல்லது ஒரு பாகம் மட்டுமாகவோ மூழ்கியிருக்கும் ஒரு திண்மப் பொருளின் மேல் செயல்படும திரவ அமுக்கம (*i*) மேல் நோக்கிச் செயல்படும், (*ii*) மூழ்கிய பாகத்தின் புவியீர்ப்பு மையம் வழிச் செயல்படும், (*iii*) அளவில், மூழ்கிய பாகத்தில் இருக்கக்கூடிய திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாக இருக்கும். இந்த முடிவு ஆர்க்கிமிடீசின் கோட்பாடு (Principle of Archimedes) எனப்படும.

மேல் நோக்கிச் செயல்படும் திரவ அமுக்கம் மிதவை விசை (Force of buoyancy) எனப்படும்.

திண்மப் பொருள் மூழ்கிய பாகத்தின் புவியீர்ப்புமையம் மிதவைமையம் (Centre of buoyancy) எனப்படும்.

மூழ்கியிருக்கும் புறப் பரப்பு முற்றிலும் வளைதலமாயிராமல் ஒரு சில சமதளப் பரப்புக்களும் சேர்ந்ததாயிருந்தால் அந்தப் பரப்புக்கள் மேல் உள்ள அமுக்கத்தையும் அவை செயல்படும் கோடுகளையும் முன் அத்தியாயத்தில் விவரித்தபடி காண முடியும். வளைதலப் பரப்பின் மேல் அமுக்கம் $\overline{C}$; சமதளப் பரப்புக்கள் மேல் உள்ள அமுக்கம் $\overline{P}$; புறப் பரப்பினுள் உள்ளடங்கு

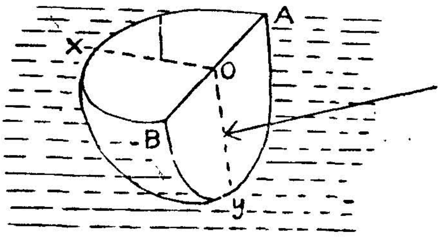
திரவத்தின் எடை $\overline{W}$ என்றால் $\overline{C} + \overline{P} + \overline{W} = 0$ ஆனதால் $\overline{C}$ மட்டும் காண முடியும்.

எடுத்துக் காட்டு 1.

ஒரு கால் கோளம், அதன் ஒரு சமதளப் பரப்பு திரவமட்டத்தில் இருக்குமாறு அதில் மூழ்கியுள்ளது. அதன் வளைதலப் பரப்பில் உள்ள திரவ அழுக்கத்தைக் காணவும். அது செயல்படும் கோட்டையும் காணவும்.

தீர்வு

(i) வளைதலத்தின் மேல் உள்ள அழுக்கம் $\overline{C}$ ஆகுக.



படம் 29.

(ii)) மற்ற புறப் பரப்பு ABy எனும் அரை வட்டத்தள மாகும். அதன் மேல் உள்ள அழுக்கம் P ஆகுக. (iii) திண்மம் அடைத்திருக்கும் இடத்தில் உள்ள திரவ எடை $\overline{W}$ ஆகுக.

$$\therefore \quad \overline{C} + \overline{P} + \overline{W} = 0$$

$$\therefore \quad C = -(\overline{P} + \overline{W})$$

$W = \frac{1}{3} \pi a^3 w$ நேர் கீழாக.

$\overline{P} = w \frac{\pi a^2}{2} \cdot \frac{4a}{3\pi} = \frac{2}{3} w a^3$ (இடைக் கோட்டில்)

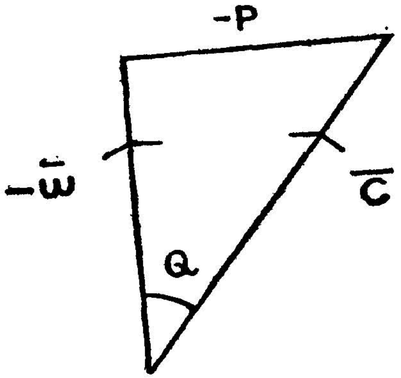
$$\therefore \quad C = -(\overline{W} + P)$$

$$\therefore \text{ அமுக்க அளவு } = \sqrt{\frac{4w^2a^6}{9} + \frac{\pi^2 a^6 w^2}{9}}$$

$$= \frac{a^3 w}{3}\sqrt{4 + \pi^2}$$

$$\text{அமுகத்தின் திசை } \tan\theta = \frac{2wa^3}{4} \div \frac{\pi a^3 w}{3}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$



படம் 30.

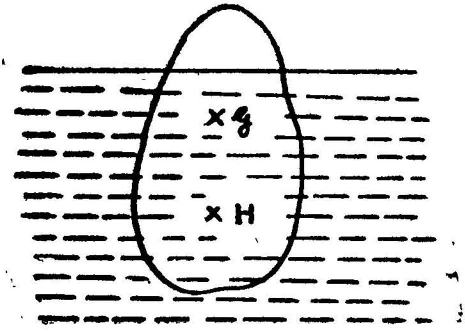
[θ என்பது அமுக்கதிசை நிலைக்கோட்டுடன் உள்ள சாய்வு]. கோளப்பரப் பெங்கும் அழுத்தம் அதற்குக் குத்தாக இருப்பதால், எங்கும் அது மையம் நோக்கிச் செயல்படும். ஆகையால் தொகுவிசை கோள மையம் வழிச் செயல்படும். இவ்வாறு அமுக்க அளவு, திசை, செயல்படும் புள்ளி மூன்றையும் காண்கிறோம்.

5. மிதக்கும் பொருள்கள்

(FLOATING BODIES)

கட்டின்றி மிதக்க விதிகள் (Conditions of equilibrium of freely floating bodies).

ஒருதிண்மப் பொருள் ஒரு திரவத்தில், புவியீர்ப்பு விசை மட்டும் செயல்படும்போது, மிதந்து சமநிலையில் இருக்க, என்ன



படம் 31.

நியதிகள் இருக்கவேண்டும் என்பதைப் பார்ப்போம். இந்நியதிகளுக்குச் சுருக்கமாக மிதவை விதிகள் (Laws of floatation எனப்பெயராகும்.

மிதவை விதிகள்

பொருள் சமநிலையில் இருப்பதால் ஆர்கிமிடீஸ் கோட்பாட்டின்படி அதன்மேல், திரவத்தின் மிதக்கும் விசை செயல்படுகிறது. (i) அதன் அளவு, திரவத்தில் மூழ்கியுள்ள பாகத்தின் கொள்ளளவுள்ள திரவ எடைக்குச் சமமாகும். (ii) அதன்

திசை மேல் நோக்கி மூழ்கியுள்ள பாகத்தின் புவியீர்ப்புமையமாகிய மிதவை மையம் (H) வழிச்செயல்படும்.

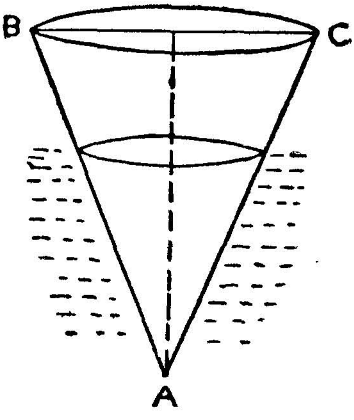
பொருள்மேல் செயல்படும் மற்றவிசை அதன் எடையாகும். செயல்படும் கோடு பொருளின் புவியீர்ப்பு மையம் g வழி கீழ்நோக்கியுள்ள நிலைக்கோடாகும். ஆகவே சமநிலைவிதிப்படி

(i) பொருளின் எடை = மூழ்கியபாகத்தில் உள்ள திரவத்தின் எடை. (ii) gH என்பது நிலைக்கோடாகும். இவ்வாறு இரு மிதவை விதிகள் வருகின்றன. அவற்றை மீண்டும் கூற

(i) மிதக்கும் பொருளின் எடை, அது மூழ்கிய பாகத்தில் உள்ள திரவத்தின் எடைக்குச் சமமாகும் (ii) பொருளின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும், மூழ்கிய பாகத்தின் புவியீர்ப்பு மையத்தையும் சேர்க்குங்கோடு நிலைகுத்துக் கோடாகும்.

இவற்றைப் பயன்படுத்திச் சில கணக்குகளின் தீர்வுகளைக் காண்போம்.

(எ—டு) 1. ஒரு சீரான கூம்பு அதன் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் முனை திரவத்தில் மூழ்கியும் இருக்குமாறு மிதந்து சமநிலையில் உள்ளது. அச்சின 'f' பாகம் திரவத்தினுள் இருந்தால் கூம்பின் அடர்த்தியைத் திரவத்தின் அடர்த்தியோடு ஒப்பிடுக.



படம் 32.

தீர்வு

கூம்பின் உயரம் h ஆகுக. அதன் அடிப் பக்க ஆரம் a ஆகுக. திரவமட்டம் அதை வெட்டு முகத்தின் ஆரம் x ஆகும். அதை அடியாகக் கொண்ட கூம்பின் உயரம் y ஆகுக. திரவ அடர்த்தி s_1 ஆகுக. கூம்பு அடர்த்தி s_2 ஆகுக.

மிதவை விதிப்படி

கூம்பின் எடை = மூழ்கியுள்ள பாகத்தில் உள்ள திரவத்தின் எடை

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\pi a^2 h\, s_2 = \frac{1}{3}\pi x^2 y\, s_1$$

$$\therefore \frac{s_2}{s_1} = \frac{x^2 y}{a^2 h} \quad \text{ஆனால்} \quad \frac{x}{y} = \frac{a}{h} = m$$

$$\therefore x = my \quad a = mh$$

$$\therefore \frac{s_2}{s_1} = \frac{y^3}{h^3} = f^3 \left[\frac{y}{h} = f \text{ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.} \right]$$

[குறிப்பு : கன அளவுகள் V_1 V_2 என்று கொண்டால் $V_1 s_1 = V_2 s_2 \quad \therefore \quad s_2 : s_1 = V_1 : V_2 = y^3 : h^3$]

(எ—டு) 2. மேற்கூறிய கணக்கில் கூம்பின் அடிப்பாகம் திரவத்தில் மூழ்கி, முனை திரவத்திற்கு மேலாக இருக்கும்படி மிதந்தால், திரவமட்டத்திற்கு மேல கூம்பின முனையின் உயரம் fh என்றால் அடர்த்தியை ஒப்பிடுக.

தீர்வு

கூம்பின் கன அளவு V_2 ஆகுக திரவத்திற்கு மேல் உள்ள பாகத்தின் கன அளவு V_1 ஆகுக: கூம்பின் அடர்த்தி s_2 ஆகுக ; திரவ அடர்த்தி s_1 ஆகுக.

$$\therefore \quad s_2 V_2 = s_1 (V_2 - V_1)$$

$$\therefore \quad \frac{s_2}{s_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_2} = 1 - \frac{V_1}{V_2}$$

$$\text{ஆனால்} \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{f^3 h^3}{h^3} = f^3$$

$$\therefore \quad \frac{s_2}{s_1} = 1 - f^3$$

(எ—டு) 3. ABC எனும் முக்கோணத்தகடு ஒரு திரவத்தில் அதன் முனை B திரவமட்டத்திலும் C திரவத்தினுள்ளும் A அதற்கு வெளியிலும் இருக்குமாறு நிலைத்தளத்தில் மிதக்கிறது. தகட்டின் அடர்த்தி s_1, திரவ அடர்த்தி s_2. பக்க நீளங்கள் a, b, c என்றால் $s_1 : s_2 = (a^2 + b^2 - c^2) : 2b^2$ என நிறுவுக.

தீர்வு

BD திரவ மட்டமாகுக. BC யின் நடுப்புள்ளி E ஆகுக. $AG : GE = 2 : 1$ எனும்படி AEல் G புள்ளியாகுக.

$\therefore$ ABC யின் பு.மை $(C \cdot G) = G$. $DH : HE = 2 : 1$ எனும் படி DE ல் H புள்ளியாகுக.

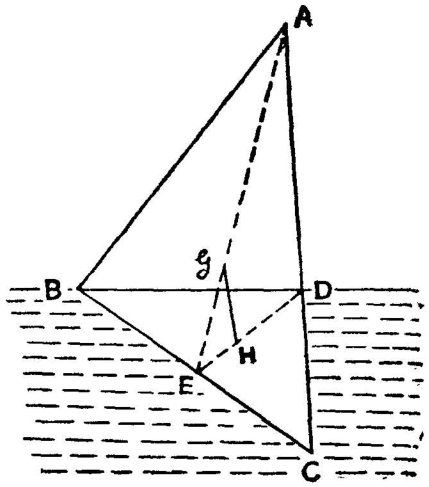
$\therefore$ H மிதவைமையமாகும்.

$\therefore$ $AG : GE = DH : HE$ $\therefore$ $GH \parallel^{l} AD$

ஆனல் மிதவை விதிப்படி GH நிலைக்கோடாகும்.

$\therefore$ $GH \perp r\ BD$ $\therefore$ $AD \perp r\ BD$ $\therefore$ $AC \perp r\ BD$

முக்கோணம் ABC-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} AC \cdot BD$



படம் 33.

முக்கோணம் BDC-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} DC \cdot BD$

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot s_1 = \frac{1}{2} DC \cdot BD\, s_2$$

$$\therefore \quad s_1 : s_2 = DC : AC$$

$$DC = BC \cos C$$

$$AC = \frac{BC \sin B}{\sin A}$$

$$\therefore \quad s_1 : s_2 = \sin A \cos C : \quad \sin B$$
$$= \sin A \sin B \cos C : \quad \sin^2 B$$
$$= 2\,ab \cos C : \quad 2\,b^2$$
$$\therefore \quad s_1 : s_2 = (a^2 + b^2 - c^2) : \quad 2\,b^2$$

[அல்லது $s_1 : s_2 = DC : AC$
$$= 2\,AC \cdot DC : 2A\,C^2$$

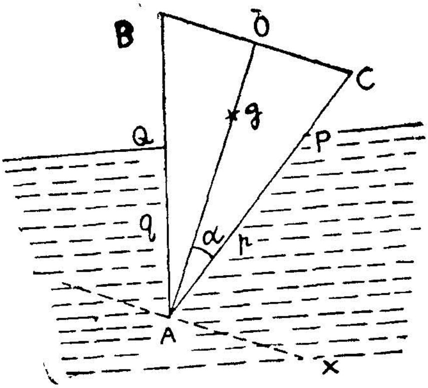
ஆனல் $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot DC$

$$\therefore \quad 2\,AC : DC = b^2 + a^2 - c^2$$
$$\therefore \quad s_1 : s_2 = a^2 + b^2 - c^2 : 2\,b^2]$$

குறிப்பு : இந்தக்கணக்கில் மிதவை விதிகள் இரண்டையும் பயன்படுத்தியுள்ளதைக் கவனிக்கவும்.

(எ—டு) 4. ஒருசீரான இரு சமபக்க முக்கோணத்தகடு அதன்முனை திரவத்தில் இருக்குமாறும் அதன் அடிப்பாகம் வெளியில் இருக்குமாறும சாய்ந்து நிலைத்தளத்தில் மிதக்கிறது. அதன் அடர்த்தி s என்ருல் $s < \cos^4 \alpha$ என நிறுவுக. (அதன் முனைக் கோணம் 2α)

திர்வு



படம் 34.

ABC என்ற முக்கோணத்தில் $AB = AC = a$; $BAC = 2\alpha$; $AO \perp r\ BC$. திரவ மட்டம் ABஐ Q-யிலும் ACஐ Pயிலும் வெட்டு கிறது. $AP = p$ $\quad AQ = q$ ஆகுக.

AO எனும் கோட்டை y அச்சாகவும், AX எனும் குத்துக் கோட்டை x அச்சாகவும் கொள்க.

ABCயின் புமை G என்றால் $G \equiv [0, \frac{2}{3} a \cos \alpha]$

$P \equiv (p \sin\alpha, p \cos \alpha)$ $Q = (-q \sin \alpha, q \cos \alpha)$ $A \equiv (0, 0)$.

$\therefore$ APQ யின் புமையம் அதாவது மிதவைமையம்

$$H = \left[\frac{(p-q)\sin\alpha}{3}, \frac{p+q\cos\alpha}{3} \right]$$

$\therefore$ GH-ன் சரிவு $= \dfrac{(p+q-2a)\cos\alpha}{3} \div \dfrac{(p-q)\sin\alpha}{3}$

$$= \frac{(p+q-2a)\cos\alpha}{(p-q)\sin\alpha}$$

PQ-ன் சரிவு $= \dfrac{(p-q)\cos\alpha}{(p+q)\sin\alpha}$

ஆனால் $GH \perp^r PQ$ [மிதவை விதி; PQ கிடைத்தளத்தில் உள்ளது; GH நிலைக் கோடாகும்]

$$\therefore \frac{(p-q)\cos\alpha}{(p+q)\sin\alpha} = \frac{-(p-q)\sin\alpha}{(p+q-2a)\cos\alpha}$$

$\therefore$ $p - q = 0$ அல்லது

$(p+q-2a)\cos^2\alpha + (p+q)\sin^2\alpha = 0.$

$p = q$ என்றால் முக்கோணம் நேராக மிதக்கும். சாய்ந்து மிதப்பதால் $p \neq q$

$\therefore$ $(p+q) - 2a\cos^2\alpha = 0$

$$(p+q) = 2a\cos^2\alpha \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

முக்கோணம் ABC-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha$

முக்கோணம் PAQ-யின் பரப்பு $= \frac{1}{2} pq \sin 2\alpha$

$\therefore$ $\frac{1}{2} a^2 \sin 2\alpha\, s = \frac{1}{2} pq \sin 2\alpha$

(திரவ அடர்த்தி 1 எனக் கொண்டோம்.)

$$\therefore pq = a^2 s \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-லிருந்து p, q என்பவை.

$t^2 - 2a\cos G + a^2 s = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

p, q மெய்யெண்களானதால்

$a^2\cos^4\alpha - a^2 s > 0$

$\therefore\ s < \cos^4\alpha.$

குறிப்பு : p, q-ன் மதிப்புகள்

$$= a\cos^2\alpha \pm \sqrt{a^2\cos^4\alpha - a^2 s}$$
$$= a\left(\cos^2\alpha \mp \sqrt{\cos^4\alpha - s}\right)$$

ஆனால் $P < a$

$$\therefore\ \cos^2\alpha + \sqrt{\cos^4\alpha - s} < 1$$
$$\cos^4\alpha - s < (1-\cos^2\alpha)^2$$
$$< 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$$

$$\therefore\ 2\cos^2\alpha - 1 < s$$

$$\therefore\ \cos 2\alpha < s$$

$$\therefore\ \cos 2\alpha < s < \cos^4\alpha$$

[சாய்ந்தும், இரு முனைகள் வெளியேயிருக்கும்படியாகவும் மிதப்பதற்கு முக்கோணத்தின் அடர்த்தியிருக்க வேண்டும்.]

6. மிதக்கும் பொருள்களின் சமநிலை உறுதிப்பாடு

(STABILITY OF FLOATING BODIES)

சமநிலை உறுதிப்பாடு

சமநிலையில் மிதக்கும் ஒரு பொருளைச் சற்றே அசைத்தால், அது மீண்டும் சமநிலைக்கே வருமானுல், அதன் சமநிலை உறுதியானது (Stable equilibrium) எனப்படும். அவ் வாறின்றிச் சமநிலையிலிருந்து விலகத்தொடங்கினுல், உறுதியற்ற சமநிலை எனப்படும்.

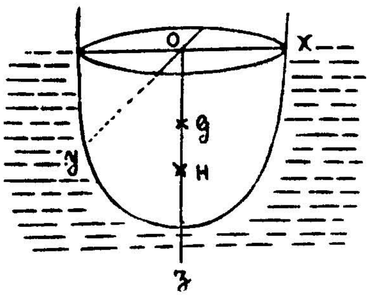
மிதக்கும் பொருளின் மேல் செயல்படும் அசைவுகளை மூன்று வகையாகப் பிரிக்கலாம். அவையாவன: (i) நேர்குத்துத் திசையில் அசைவு, (ii) அல்லது கிடைத்திசையில் அசைவு, (iii) மிதக்கும் தளத்தில் உள்ள ஒரு கோட்டைச்சுற்றிய சுழல் அசைவு.

(i) மிதக்கும் பொருளைச் சற்றே கீழே அமிழ்த்திஞல், மிதவை விசை அதிகரிக்கும். ஆகவே, பொருளை விட்டவுடன் மேல் நோக்கி மீண்டும் சமநிலைக்கு வரும். அதைச் சற்றே மேலே தூக்கிஞல், மிதவை விசை (Force of buoyancy) சற்றே குறையும். ஆகவே, அசைவு நின்றதும் பொருள் கீழ் நோக்கிச் சமநிலைக்கே வரும். ஆதலால், அசைவுகள் நிலைக்கோட்டில் மேலோ கீழோ ஆனுல், சமநிலை இத்தகைய அசைவுகளுக்கு உறுதியானதாகும்.

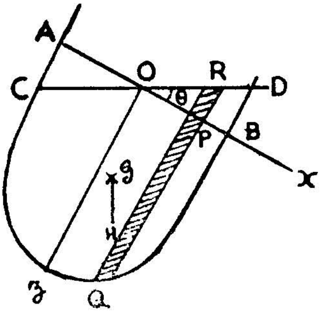
கிடைக்கோட்டுத் திசையில் தள்ளினுல், பொருள் மேல் செயல்படும் விசையில் மாற்றம் ஏதுமில்லை. ஆகவே, சம நிலை மாருது.

நாம் ஆராயவேண்டியது பொருளின் மிதவைத்தளத்தில் உள்ள ஒரு கிடைக்கோட்டைச் சுற்றித் திரும்பும்படிச் சற்றே

அசைத்தால், சமநிலை நிற்குமா நிற்காதா என்பதைப் பற்றியாகும்.



படம் 35 (i)



படம் 35 (ii)

மிதவைத்தளத்தில் OY எனும் கோட்டைச் சுற்றி மிதக்கும் O° கோணத்தில் சுழற்றுவோம். திருப்புவதற்கு முன் Ox, மிதவைத்தளத்தில் x அச்சு; OZ நேர்கீழாக z அச்சு ஆகுக. அச்சுகளும் திரும்பட்டும். படம் 35 (i)-ல் சுழலச்சாகிய OY-க்குக் குத்தாகவுள்ள, பு. மையம் g, மிதவை மையம் H இவை வழிச்செல்லும் நிலைத்தளம் காட்டப்பட்டுள்ளது. [இரு மையங்களும் இவ்வாறு ஒரே நிலைத்தளத்தில் அமையக் கூடிய மிதவைப் பொருள்களைப்பற்றியே இங்கு ஆராய்கிறோம்.]

$\delta V = \delta_x \delta_y z$ என்பது மிதவைத்தளத்தில் $P(x, y, z)$ எனும் புள்ளியில் அமையும் நுண் கன அளவு ஆகுக. திருப்பத்தால் z என்பது $z + x\tan\theta$ அல்லது θ சிறியதாகையால் $z + x\theta$ ஆகிறது.

$\delta V = \delta_x \delta_y$ (திருப்பத்திற்கு முன்னர்)

$\delta V = \delta_x \delta_y (z + x\theta)$ (திருப்பத்திற்குப் பின்னர்)

மிதக்கும் பொருளினால் விலக்கப்பட்ட திரவ அளவு மாறுபடாதபடிச் சுழலசைவு அமையட்டும்.

அப்போது $$\iint_A z\,\delta x\,\delta y = \iint_A (z + x\theta)\,\delta_x\,\delta_y$$

$$\therefore\ \theta \iint x\,\delta x\,\delta y = 0$$

மிதவைத்தளத்தில் பரப்பு A ஆகுக.

அதன் பு·மையம் $(\bar{x}, \bar{y})$ ஆகுக.

$$\therefore \quad A\bar{x} = \int\int x\delta_x \, \delta_y$$

$\int\int x \, \delta_x \, \delta_y = 0$ என்றால் $A\bar{x} = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad \bar{x} = 0$ $\therefore$ பு· மையம் y அச்சில் இருக்க வேண்டும். ஆகவே, மிதக்கும் பொருளினால் விலக்கப்பட்ட திரவ அளவு மாறாதிருக்க சுழலச்சு பு மையம் வழிச் செலலவேண்டும் எனும் உண்மையை அறிகிறோம்.

[பெரிய கப்பல்கள் போன்றவை மிதக்கும்போது மிதவைத் தளம் ஒரு கோட்டிற்குள் இருபுறம் ஒரேவடிவாக அமையும்படி (Symmetrical) இருக்கும். இந்தக்கோடு பு. மையம் வழிச்செல்லும் கோடாகும்.]

(ii) இத்தகைய அச்சைச்சுற்றி மிதக்கும் பொருளைச் சற்றே திருப்புகிறோம் எனக் கொள்வோம்.

மிதக்கும் பொருளின் பு.மையம் $g(\bar{x}, \bar{y}, z)$ ஆகுக. g-க்கு நேர்கீழாக மிதவை மையம் H இருப்பதால் அதன் கூறுகள் $(\bar{x}\ \bar{y}, z)$. z கூறுமட்டும் மாறுபடும். இது பொருளின் மேல் அசைவு ஏற்படுவதற்கு முன்னர் பின்னர் உள்ள மிதவை மையம் H' ஆகுக. அதன் கூறுகள் $(\bar{x}'\ \bar{y}'\ \bar{z}')$ படம் 35 (ii)-ல் RPQ எனும் நுண் அளவுத்திரவத்தின் பு. மையக் கூறுகள்

$$\left(x, y, \frac{z + x\theta}{2} - z\theta\right)$$

$$\text{அதாவது} \left(x, y, \frac{z - x\theta}{2}\right)$$

$$\text{அதாவது} \left(x, y, \frac{z - x\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \quad V\bar{x}' = \int\int_A (z + x\theta) \cdot x \, \delta x \, \delta y$$

$$V\bar{y}' = \int\int_A (z + x\theta) \, y \, \delta x \, \delta y$$

$$V\,z' = \int\int_A (z + x\theta)\left(\frac{z - x\theta}{2}\right)\delta x\,\delta y$$

இவை H'-ன் கூறுகளைத் தருகின்றன. மிதவைப் பரப்பு AB முழுவதும் நுண் தொகை கொள்ள வேண்டும்.

இதேபோல மிதவை மையத்தின் முன்னிலை H காண.

$$V\,\bar{x} = \int\int zx\,dx\,dy \qquad Vz = \int\int zy\,dx\,dy$$

$$V\,\bar{z} = \int\int \frac{z^2}{2}\,dx\,dy$$

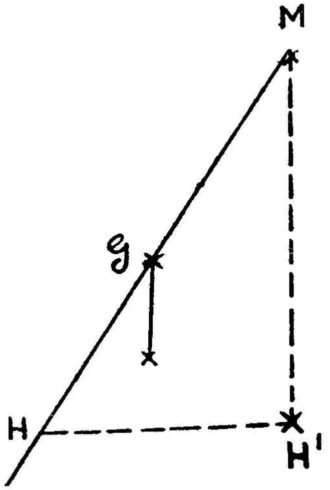
ஆனால் $$V\,z' = \int\int \frac{z^2}{2}\,dx\,dy - \int\int \frac{x^2\,\theta^2}{2}\,\delta x\,\delta y$$

இதில் θ மிகவும் நுண்ணியதாகையால் θ^2 மிகமிக நுண்ணியது. இதைக் கணக்கில் எடுக்கத் தேவையில்லை. $\therefore\ z = z'$ எனக் காண்கிறோம். அதாவது சிறுசுழலசைவால், (மிதக்கும் பொருள் விலக்கும் திரவ அளவு மாறுமல்) மிதவை மையத்தின் நிலை, திரவமட்டத் தளத்திற்கு இணையாகக் கிடைத்தளத்தில் மாறுகிறது எனும் உண்மையைக் காண்கிறோம்.

[மிதக்கும் பொருள், விலக்கும் திரவ அளவு மாறுமல் அது அசையும்போது ஏற்படும் மிதவை மையத்தின் இயங்குதளம் மிதவைத்தளம் (Surface of buoyancy) எனப்படும். மேலே H.லிருந்து H'-க்கு அடுத்து மாறும்போது HH' திரவ மட்டத்தளத்திற்கு இணையாக இருக்கும் என்பதைப் பார்க்கிறோம்.

அசைவுக்குப் பின்னர் உள்ள நிலையில் மிதக்கும் பொருளின் மேல் ஒரு சுழலிணை செயல்படுவதைக் காணலாம் மிதக்கும் பொருளின் பு மையம் வழி அதன் எடை கீழ் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. அதே அளவுள்ள மிதவை விசை, இப்போதைய மிதவை மையம் H' வழி மேல் நோக்கிச் செயல்படுகிறது. இவ்வாறு ஒரு சுழலிணை செயல்படுகிறது. H' வழிமேல் நோக்கிச் செல்லும் நிலைக் குத்துக்கோடு HGஐ M எனும் புள்ளியில் வெட்டட்டும். இந்தப் புள்ளியை மிதவைக் காப்புப் புள்ளி (**Meta centre**) என்போம். H' வழி நிலைக் கோடு HGஐ வெட்ட

வேண்டுமெனில், H, H' என்பவற்றின் y உறுப்புகள் ஒன்றாக இருக்க வேண்டும்.



படம் 36.

$$\therefore \int\int zy\,\delta x\,\delta y = \int\int (z + x\theta)\,y\,\delta x\,\delta y$$

$$\therefore \theta \int\int xy\,\delta y\,\delta x = 0$$

∴ பரப்பிற்கு y அச்சு தலையாய அச்சாக (Principal Axis) இருக்கவேண்டும் எனக் காண்கிறோம்.

ஆகவே, சிறு அசைவு கொடுக்கும் போது, சுழலச்சு பரப்பின் பு. மையம் வழிச் செல்லும் தலையாய அச்சாக இருக்க வேண்டும். இத்தகைய அசைவினால் ஏற்படும் சுழலிணையின் திருப்பு திறன் $= g\,\rho\,VGM \sin\theta$.

[ρ என்பது திரவத்தின் அடர்த்தி; V என்பது மிதக்கும் பாகத்தின் கொள்ளளவு; θ என்பது சுழற்சிக் கோணம்.]

θ சிறிய தாகையால்,

$$\therefore \text{திருப்பு திறன்} = g\,\rho\,V[HM - HG]\,\theta$$

$$HM \sin\theta = \bar{x}' - \bar{x}$$

$$= \frac{\int\int (z + x\theta)\,x\delta x\,\delta y - \int\int zx\delta x\delta y}{V}$$

$$\therefore \quad HM\,\theta = \theta \frac{\int\int x^2 \delta x \delta y}{V}$$

$$= \theta \frac{Ak^2}{V}$$

$$\therefore \quad HM = \frac{Ak^2}{V}$$

(k என்பது பரப்பின் y அச்சைச் சுற்றிய சுழலாரம்.)

சமநிலை உறுதிப்பாடு

மீண்டும் மிதக்கும் பொருள் சமநிலைக்கே வரவேண்டுமெனில், திருப்புதிறன் மேல்நோக்கிச் சுற்ற வேண்டும். அதற்கு M எனும் மிதவைக் காப்புள்ள Gஐ விட உயரத்தில் இருக்க வேண்டும். அதாவது $HM > HG$.

அவ்வாறுயின் மிதக்கும் பொருளின் சமநிலை உறுதியான தாகும்.

$HM < HG$ என்றால், சிறிய அசைவானது, சமநிலையினின்று விலகச் செய்கிறது. ஆகவே, சமநிலை உறுதியானதல்ல.

குறிப்பு : சுழலிணை செய்யும் வேலை

$$= g\rho\, V[HM - HG] \frac{\theta^2}{2}$$

$$= g\rho[V.HM - V.HG] \frac{\theta^2}{2}$$

$$= g\rho\, [Ak^2 - V.HG] \frac{\theta^2}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு கனசதுரம் அதன் இரு எதிர்ப்பக்கங்கள் கிடைத் தளத்தில் இருக்குமாறு தண்ணீரில் மிதக்கிறது. அதன் சமநிலை உறுதி நியதி காண்க.

தீர்வு

சதுரத்தின் பக்கம் a ; தண்ணீரில் உள்ள நீளம் x; அதன் அடர்த்தி s என்றால் $a^3 s = a^2 x$

$$x = as$$

உறுதிப்பாட்டிற்கு $\frac{Ak^2}{V} > HG$

$$A = a^2;\ k^2 = \frac{a^2}{12};\ V = a^2x;\ HG = \frac{a}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\frac{a^4}{12\,a^2x} > \frac{a - x}{2}$$

$$a^2 > 6\,x\,(a - x)$$

$$a^2 > 6\,as\,(a - as)$$

$$1 > 6\,s\,(1 - s)$$

$$6\,s^2 - s + 1 > 0$$

$6\,s^2 - 6s + 1 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின்

தீர்வு $s = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$

∴ s இந்த மதிப்புக்களுக்கிடையேயிருந்தால், சமநிலை உறுதியற்றது.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு சாதாரண உருளை அதன் அச்சு நிலைக்கோட்டில் இருக்குமாறு திரவத்தில் மிதக்கிறது. அதன் சமநிலை உறுதியாக இருக்க, உருளையின் உயரம், விட்டம் எவ்வாறு இருக்க வேண்டும் ?

தீர்வு

உருளையின் உயரம் l ஆகுக.

விட்டம் $2a$; திரவத்தில் ஆழ்ந்துள்ள பாகத்தின் உயரம் x ; திரவ அடர்த்தி s ஆகுக. உருளையின் அடர்த்தி w ஆகுக.

உருளையின் எடை = அது விலக்கிய திரவத்தின் எடை.

$$\pi\, a^2 l w = \pi\, a^2 x s$$

$$\therefore \quad \underline{lw = xs} \text{ (இது சமநிலை நியதி)}$$

சமநிலை உறுதிக்கு.

$$\frac{Ak^2}{V} = HG.$$

$$A = \pi a^2;\ k^2 = \frac{a^2}{4};\ V = \pi a^2 x;\ HG = \frac{l}{2} - \frac{x}{2}$$

பிரதியிட்டுச் சுருக்க } $a^2 > 2x(l - x)$ என வரும்.

$$a^2 > 2\,\frac{lw}{s}\left(l - \frac{lw}{s} \right)$$

$$\therefore \quad \underline{a^2 s^2 > 2\, l^2 w (s - w)}$$

[$s = 1;\ w = \frac{1}{3}$ என்றால் $a^2 > \frac{2\,l^2}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)$

$$9a^2 > 4\,l^2$$
$$3a > 2l$$
$$2a > \frac{4\,l}{3}$$

விட்டம், உயரத்தின் $\frac{4}{3}$ மடங்கை விட அதிகமானால், சமநிலை உறுதியாகும்.]

ஆனால் $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} < s < 1$ என்றாலும்,

$0 < s < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ என்றாலும் சமநிலை உறுதியானது.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு கூம்பின் முனைக்கோணம் 60°. அது தண்ணீரில் அச்சு நிலைக்குத்தாகவும், முனை கீழாகவும் இருக்குமாறு மிதக்கிறது. அதன் மெடாசென்டர் நீர்மட்டத்தளத்தில் உள்ளதெனக் காண்க. அதன் அடர்த்தி $> \frac{27}{64}$ என்றால், சமநிலை உறுதியானது எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு :

(i) கூம்பின் உயரம் h ஆகுக. அடிப்பக்க ஆரம் r ஆகுக. நீரில் மூழ்கியுள்ள உயரம் H ஆகுக. நீர் மட்டத்தளத்தில் உள்ள வெட்டு முக ஆரம் H ஆகுக. கூம்பின் அடர்த்தி s ஆகுக.

$$\therefore \quad \frac{1}{3}\pi r^2 h s = \frac{1}{3}\pi k^2 H$$

$$\therefore \quad \underline{r^2 h s = k^2 H}$$

$$HM = \frac{Ak^2}{V}$$

$$A = \pi k^2;\ k^2 = \frac{k^2}{4};V = \frac{\pi k^2 H}{3}$$

$$\therefore \quad HM = \frac{\pi k^4 \cdot 3}{4 \cdot \pi k^2 H} = \frac{3}{4}\ \frac{k^2}{H}$$

O என்பது முனையானால், $OH = \frac{3}{4} H$

$$\therefore \quad OM = \frac{3}{4} H + \frac{3}{4}\ \frac{k^2}{H} = \frac{3}{4}\left[\frac{k^2 + H^2}{H}\right]$$

ஆனால் $\frac{k}{H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \therefore \quad K = \frac{H}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \quad K^2 = \frac{H^2}{3} \quad \therefore \quad \frac{k^2 + H^2}{} = \frac{4H^2}{3}$$

$$\therefore \quad OM = \underline{\frac{3}{4} \cdot \frac{4H^2}{3H} = H}$$

∴ மெடா சென்டர் நீர் மட்டத்தளத்தில் உள்ளது.

[மறுதலையாக நீர் மட்டத்தளத்தில் அமைய வேண்டுமானால், கூம்பின் முனைக்கோணம் 60° ஆக வேண்டும்.]

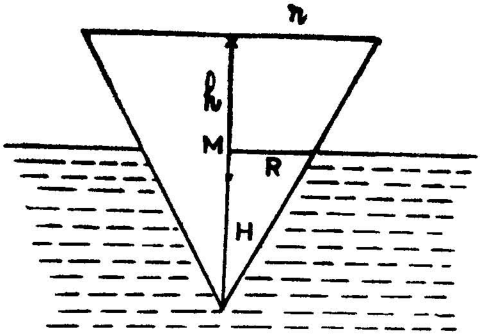
சமநிலை உறுதிப்பாடு

(ii) $HM > HG$

$\therefore \quad OM > OG$

$$\therefore \quad H > \frac{3}{4}h \; ; \; \frac{H}{h} > \frac{3}{4}$$

ஆனால், $\frac{H}{h} = \frac{r^2 s}{k^2}$; ஆனால் $\frac{r}{k} = \frac{h}{H}$



படம் 37.

$$\frac{H}{h} = \frac{h^2}{H^2} s \quad \therefore s = \frac{H^3}{h^3}$$

$$\therefore \quad s = \frac{H^3}{h^3} > \frac{27}{64}$$

பயிற்சி

1. ஓர் உருளை வடிவ மரக்கட்டை அதன் அச்சு நீர்மட்டத் தளத்தில் இருக்குமாறு மிதக்கிறது. அதன் அடிப்பக்க ஆரம் a; உயரம் h. அதற்கு அச்சின் வழிச் செல்லும் நிலத்தில் நகருமாறு சிறு அசைவு கொடுத்தால், $h > 2a$ என்றால் மட்டுமே சமநிலை உறுதி என நிறுவுக.

2. மேல் கணக்கில், சுழல் அசைவு உருளையின் அச்சைச் சுற்றி ஏற்பட்டால், சமநிலை உறுதி நியதி என்ன என்பதைக் காண்க.

3. ஓர் உருளையின் அடிப்பக்க ஆரம் a, நீளம் $\frac{a}{n}$; அதன் அடர்த்தியின் மதிப்பு $\frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-2n^2}]$, $\frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 - 2n^2}]$

எனும் எண்களுக்கிடையே இருந்தால், அச்சு நேர் குத்தாகவுள்ள சமநிலை உறுதியற்றதென நிறுவுக.

4. அச்சு நேர் குத்தாக இருக்கும்படி ஓர் உருளை நீரில் மிதக்கிறது. அதன் உயரம் $3a$; ஆரம் $2a$. அடர்த்தி s-ன் மதிப்பு $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ என்ற எண்களிடையே ஆனுல் சமநிலை உறுதியற்றது எனக் காண்க

5. ஒரு திண்மக் கூம்பின் அடர்த்தி s. அது σ அடர்த்தியுள்ள திரவத்தில் அச்சு நேர் குத்தாகவும், முனை கீழாகவும் இருக்கும்படி மிதக்கிறது. சமநிலை உறுதியாக இருக்க $s/\sigma > \cos^6 \alpha$ என இருக்க வேண்டும் எனக் காட்டு [முனைக்கோணம் 2α].

6. மேல் கணக்கில் முனை நீர்மட்டத்திற்கு மேல் இருந்தால் சமநிலை உறுதியாக $s/\sigma < 1 - \cos^6 \alpha$ என இருக்கவேண்டும் எனக் காண்க.

7. முக்கோணப் பட்டகத்தின் அடிப்பாகம் சமபக்க முக்கோணம் ஆகும். அதன் ஒரு குத்து விளிம்பு நீரில் மூழ்கியும், மற்றிரு விளிம்புகள், நீருக்கு மேல் கிடைத்தளத்தில் இருக்குமாறும் மிதக்கிறது. அதன் அடர்த்தி $> \frac{9}{16}$ என்ருல், விளிம்புகள் கிடைக்கோடாக இருக்குமாறுள்ள அசைவுகளுக்குச் சமநிலை உறுதியானது எனக் காண்க

8. ஓர் இருசமபக்க முக்கோணத் தகட்டின் முனைக்கோணம் 2α; அதன் முனை தண்ணீருக்குள்ளும், அடிப்பக்கம் கிடைக்கோட்டில், தண்ணீருக்கு வெளியாகவும் இருக்கும்படி நிலைத்தளத்தில் மிதக்கிறது. அதன் அடர்த்தி $> \cos^2 \alpha$ என்ருல் சமநிலை உறுதியெனக் காண்க.

9. மேற்கூறிய முக்கோணத்தின் முனை நீருக்கு வெளியேயும், அடிப்பக்கம் நீருக்குள் கிடைக்கோட்டிலும் அமையும்படி மிதக்கிறது. அடர்த்தி $< 1 - \cos^4 \alpha$ என்ருல் சமநிலை உறுதி எனக் காண்க.

10. திரவத்தின் அடர்த்தியைப்போல் $\frac{2}{3}$ மடங்கு அடர்த்தியும், முனைக்கோணம் 60° ஆகவுமுள்ள ஒரு கூம்பு அதன் முனை நீருக்குள் ஆழ்ந்து மிதக்கிறது. அதன் சமநிலை உறுதி என நிறுவுக.

11. அரைக்கோளத்தின் உருளை பொருத்திய வடிவுடைய மரக்கட்டை, கோளத்தின் ஒரு பாகம் திரவத்தில் ஆழ்ந்தபடி அச்சு நிலைக்குத்தாக மிதக்கிறது. அதன் சமநிலை உறுதியாக இருக்க உருளையின் உயரம் $h < \frac{a}{\sqrt{2}}$ (a = உருளையின் ஆரம்) எனக்காட்டு.

12. ஒரு சன்னக் கம்பின் எடை w. அடர்த்தி s. அதன் ஒரு முனையில் W எடையுள்ள துகள் பொருத்தப்படுகிறது. இந்த முனை திரவத்தில் மூழ்கியிருக்குமாறு கம்பு நிலைக்குத்தாக மிதக்கிறது. $W > w\left(\frac{1}{\sqrt{s}} - 1\right)$ என்றால், சமநிலை உறுதி எனக்காட்டு.

13. பரவளைவுத் திண்மம் (Paraboloid) அதன் முனை திரவத்தில் இருக்குமாறும், அச்சு நிலைக்குத்தாகவும் மிதக்கிறது. திண்மத்தின் அடர்த்தி s; திரவ அடர்த்தி σ. பரவளைவின் (Latus Rectum) $4a$. அதன் உயரம் h என்றால், மெடா செண்டரின் உயரம் நிலையானது எனவும், சமநிலை உறுதி என்றால் $3a > \left(1 - \sqrt{\frac{s}{\sigma}}\right) h$ என இருக்கவேண்டும் எனவும் காட்டு.

14. ஓர் அரைக்கோளத்திண்மம் [அடர்த்தி s; ஆரம் a] அதன் சமதள பாகம் திரவத்தில் இருக்குமாறு மிதக்கிறது. திரவ அடர்த்தி σ. சமநிலை உறுதியாக இருக்கும் என நிறுவுக.

பாகம் 2

நிலையியல்

1. விசைகளின் சமநிலை

(FORCES IN EQUILIBRIUM)

இங்கு விறை பொருள்களின்மேல் விசைகள் செயல்பட அவை இயக்கமின்றி சமநிலையில் இருப்பதை ஆராய்வோம். முதலில் விறை பொருள் என்றால் என்ன என்பதை வரையறுப்போம்.

விறை பொருள் கணக்கிலாத திணிவுடைத் துகள்களால் ஆனது. விசைகள் செயல்பட்டாலும், செயல்படாவிட்டாலும் இரு துகள்களிடையேயுள்ள தூரம் மாறாதிருக்கும்படியாக, உள்ளுறு விசைகள் அமையும் துகள் தொகுதி, 'விறை பொருள்' எனப்படும்.

1-1. சம விசைத் தொகுதிகள்

இரண்டு விசைத் தொகுதிகள் ஒரு விறை பொருளின்மேல் தனித் தனியாகச் செயல்பட, ஒரே விளைவை ஏற்படுத்தினால், அவை சமவிசைத் தொகுதிகள் (†Equivalent system of forces or †† equipollent forces) எனப்படும்.

O எனும் புள்ளி ஆதியாகுக. $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \ldots$ எனும் விசைகள் $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ எனும் நிலை வெக்டருடைய புள்ளிகளில் விறை பொருளின் மேல் செயல்படட்டும்.

$\bar{F}_1', \bar{F}_2', \bar{F}_3'$ ... எனும் விசைகள் $\bar{r}_1', \bar{r}_2', \bar{r}_3'$ எனும் நிலை வெக்டர்களுடைய புள்ளிகளில் விறை பொருளின்மேல் செயல்படட்டும்.

$$\Sigma F_i = \Sigma F_i'$$

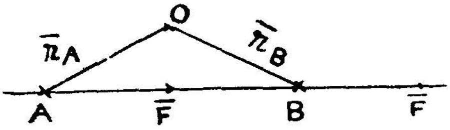
$$\Sigma \bar{r}_i \times F_i = \Sigma \bar{r}_i' \times F_i'$$ என்றால்,

† Definition given in Classical Mechanics—Rutherford

†† As given in 'Principle of Mechanics'—Synge & Griffith.

விளைவுகள் சமமாக இருக்கும் என இயக்கவியலில் காணலாம்; அல்லது இந்த இரு சமன்பாடுகளுக்கிணங்க விசைத் தொகுதிகள் அமைந்தால், அவை சம விசைத் தொகுதிகளாகும் (Equivalent system of forces)

1-2. இந்த விளக்கத்தினின்று வரும் வழி முடிவுகள் என்ன என்று பார்ப்போம்.



படம் 38.

(i) ஒரே கோட்டில் இரு சம விசைகள் (திசையிலும் அளவிலும் சமமானவை) முறையே A, B எனும் புள்ளிகளில் செயல்பட்டால், O எனும் ஆதிக்கு A-ன் நிலைவெக்டர் $\bar{r}_A$ ஆகுக. B-ன் நிலைவெக்டர் $\bar{r}_B$ ஆகுக.

(a) விசைகள் $\bar{F} = \bar{F}$

(b) $\bar{r}_A \times \bar{F} = (\bar{r}_B - \bar{AB}) \times \bar{F}$

$$= \bar{r}_B \times \bar{F} - \bar{AB} \times \bar{F}$$

$$= \bar{r}_B \times \bar{F} (\bar{AB} \times \bar{F} = 0)$$

(இரண்டு நியதிகளுக்கும் உட்பட்டு விசைகள் செயல் படுவதால்.)

ஒரு விறை பொருள்மேல், ஒரு புள்ளியில் ஒரு விசை செயல் பட்டால், அது செயல்படும் கோட்டின் மேல் வேறொரு புள்ளியில் அதே திசையில் செயல்படும் விசை அதற்குச் சமமாகும்.

இதை விசையின் இடம் மாறு கொள்கை (Principle of Transmissibility of force) என்று கூறுவர்.

[இதை எடுகோளாகக் கொண்டு, சம விசைத்தொகுதிகளைக் காட்டுபவரும் உளர்.]

(ii) ஒரே கோட்டில் சம நிலையில் உள்ள விறை பொருள் மேல் எதிரெதிர்த்திசையில் சம விசைகளைப் புகுத்தினால்,

பொருளின் சமநிலை கெடாது. ஏனெனில், கோட்டில் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் எதிரெதிர்திசைகளில் செயல்படும் விசைகள் கோட்டில் ஒரே புள்ளியில் அவைபோன்று செயல்படும் விசைகளுக்குச் சமம (மேலே சொன்னதிலிருந்து). ஆகவே, அவற்றின் தொகுவிசை பூச்சியம். அதனால் சம நிலையோ, அல்லது வேறு நிலையோ கெடாது.

(iii) $\bar{F}_1$, F_2 எனும் இருவிசைகள் விறை பொருளின் ஒரே புள்ளியில் செயல்படட்டும். அதன் நிலை வெக்டர் $\bar{r}$ ஆகுக.

$\bar{F}_1$ $\bar{F}_2$ என்பவை ஒரே புள்ளியில் செயல் படுவதால் அவற்றிற்குத் தொகு விசை (Resultant Force) யுள்ளது (விசை இணைகர விதிப்படி). அது $\bar{F}$ என்றால் $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ ...... (1)

இப்போது $\bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)$

$$= \bar{r} \times \bar{F} + \bar{r} \times \bar{F}_2 \qquad \text{......} \quad (2)$$

இவ்வாறு இரு நியதிகளுக்கும் அடங்கியதால் தொகுவிசை $\bar{F}$-ம். இரு விசைகள் $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$-ம் சமவிசைத் தொகுதிகளாகும்.

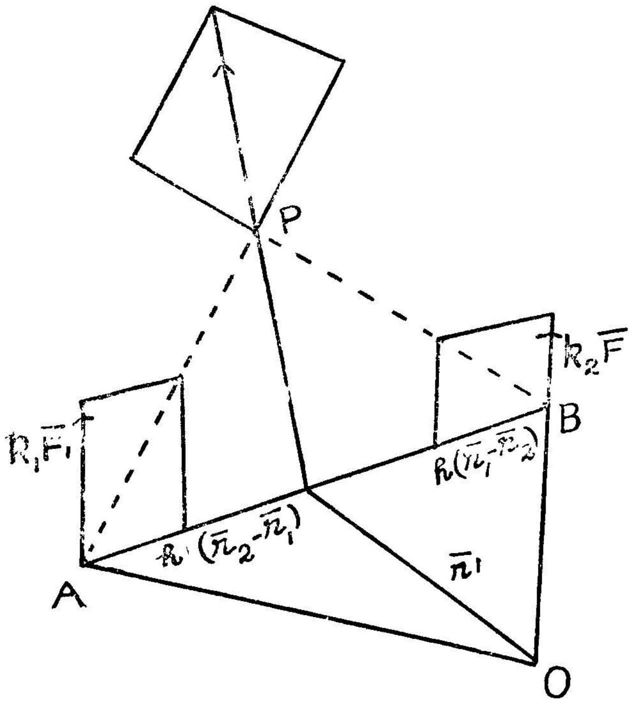
(iv) முன்னர் (*i*), (*iii*) ஆகியவற்றில் கூறப்படுவதிலிருந்து பின்வரும் சம விசைத் தொகுதிகளைக் காணலாம் $\bar{F}_1$, F_2 என்ற இரு விசைகள் ஒரு விறை பொருளின் மேல் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் செயல்பட்டு, அவை செயல்படும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று ஒரு புள்ளியில் வெட்டிக் கொண்டால், அந்தப்புள்ளியில் செயல்படும் $(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)$ என்ற ஒரு விசையும், மேற்சொன்ன $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ என்ற இருவிசைகளும் சமவிசைத் தொகுதிகளாகும்.

1-3. இரு இணை விசைகளின் தொகுவிசை

பொதுவாக ஒரு விறை பொருளின் மேல், இரண்டு இணைகோடுகளின் மேல் செயல்படும் இரு விசைகள் கொண்ட விசைத் தொகுதிக்குச் சமமாக ஒரு விசை காண முடியும். இந்தத் தனி விசை, இரு இணைவிசைகளின் தொகுவிசை (Resultant of two parallel forces) எனப்படும். இது எவ்வாறு என்பதைக் கீழே விவரிப்போம்.

ஒரு விறை பொருளின் மேல் உள்ள *A*, *B* எனும் இரு புள்ளிகளில் $k_1\bar{F}$, $k_2\bar{F}$ எனும் இரு இணைவிசைகள் செயல்படட்டும்.

O-எனும் ஆதிக்கு A, B-ன் நிலை வெக்டர்கள் $\bar{r}_1$ $\bar{r}_2$ ஆகுக. AB-ன் திசையும் $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$-ன் திசையும் ஒன்றே. A, B என்ற



படம் 39.

புள்ளிகளில் $h(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$, $h,(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$ எனும் விசைகளை முறையே புகுத்துவோம். இவற்றின் அளவுகள் சமம்; திசை எதிர்; செயல்படும் கோடு ஒன்றே. ஆகவே, சமநிலை மாறுபடாது [(ii) பார்க்கவும்].

A-ல் உள்ள விசைகள், $k_1\bar{F} + h(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$ எனும் விசைக்குச் சமம், அது செயல்படும் கோடு AP ஆகும். B-ல் உள்ள விசைகள் $k_2 F + h(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$-க்குச் சமம். இவை செயல்படும் கோடு BP ஆகும். பொதுவாக இரு கோடுகளும் (ஒரே தளத்தில் அமைவதால்) P எனும் புள்ளியில் சந்திக்கும்.

[ஆனால் $k_2 = - k_1$ என்றால் B-ல் உள்ள தொகுவிசை $-k_1 F - h(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = -\{k_1 \bar{F} + h(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\}$ என A-யுள்ள

விசைக்குச் சமமாகவும் திசையில் எதிராகவும் இருப்பதால், தொகு விசைகள் செயல்படும் கோடுகள் ஒன்றையொன்று சந்திக்காது. இந்த ஒரு விதிவிலக்கைப் பிறகு ஆராய்வோம்.]

ஆகவே, A, B-ல் செயல்படும் விசைகளும் P-ல் செயல்படும் $k_1 \bar{F} + h(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)$; $k_2 \bar{F} + h(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)$-ம் சமவிசைகளாகும். இவை P எனும் புள்ளியில் செயல்படுவதால் [(iii)-லிருந்து] தொகு விசை ஒன்றுக்குச் சமம். தொகுவிசை P-ல் செயல்படும் இரு விசைகளின் வெக்டர் கூடுதலாகும். அதாவது அந்த விசை

$$[k_1 \bar{F} + h(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)] + [k_2 \bar{F} + h(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)] = (k_1 + k_2)\bar{F}$$

இந்த விசை செயல்படும் கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியாதெனக் கண்டால் போதும். விசை செயல்படும் கோடு AB ஐ C-ல் வெட்டட்டும். அதன் நிலை வெக்டர் $\bar{k}$ ஆகுக. A, B-ல் செயல்படும் விசைகள் $k_1 \bar{F}_1$, $k_2 \bar{F}$-ம் இந்த ஒருவிசை $(k_1 + k_2)\bar{F}$ சமவிசைத் தொகுதிகளானதால்

$$\bar{k} \times (k_1 + k_2)\bar{F} = \bar{r}_1 \times k\bar{F} + \bar{r}_2 \times k_2 \bar{F}$$

$\bar{k}^1 = \dfrac{k_1 \bar{r}_1 + k_2 \bar{r}_2}{k_1 + k_2}$ என்பது இந்தச் சமன்பாட்டுக்கிணங்கிய k-ன் ஒரு மதிப்பு என்பதை எளிதில் காணலாம்.

அதாவது AB எனும் கோட்டை $k_2 : k_1$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிவழி, தரப்பட்டுள்ள விசைகளின் திசையில், இணை விசைகளின் தொகு விசை செயல்படுவதைக் காண்கிறோம்.

$|k_1 \bar{F}| = P\ [k_2 \bar{F}] = Q$. அவை செயல்படும் திசை ஒன்றாகவும் ஆனால் தொகுவிசையின் அளவு $(P + Q)$; அது செயல்படும் கோடு ABஐ உள்ளீடாக $\dfrac{k_2}{k_1}$ அதாவது $\dfrac{Q}{P}$ எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும். திசைகள் எதிரெதிரானால், தொகு விசையில் அளவு $(P-Q)$ ஆகும். இங்கு k_2 எதிரெண்ணாகும். செயல்படும் கோடு AB, புறம்பாக $\dfrac{Q}{P}$-எனும் விகிதத்தில் பிரிக்கும். இவ்வாறு

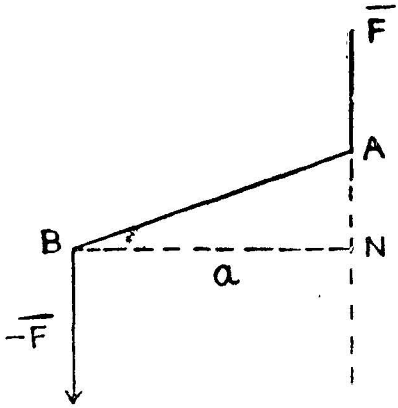
ஒரு விறைபொருளின் மேல் செயல்படும் இணை விசைகளின் [நேரிணையாயினும் அல்லது எதிரிணையாயினும்] தொகுவிசையின் அளவு திசை, செயல்படுகோடு இவற்றைச் சமவிசைத் தொகுதியின் விளக்கத்திலிருந்து கண்டோம்.

1-4. சுழலிணை (Couple)

இரு வெவ்வேறு கோடுகளில் செயல்படும் இரு விசைகள் $\bar{F}_1 - \bar{F}_1$ சேர்ந்தது சுழலிணை எனப்படும் [$\bar{F}_1 - \bar{F}_1$ என்றதால் கோடுகள் இணைகோடுகளாக வேண்டும் எனத் தெரிகிறது]

$\bar{F}$ செயல்படும் கோட்டில் $\bar{r}_1$ எனும் நிலைவெக்டருடைய A எனும் புள்ளியைக் கொள்க. $-\bar{F}$ செயல்படும் கோட்டில் $\bar{r}_2$ எனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளி B ஐக் கொள்க. அப்போது $\bar{a}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளியைச் சார்ந்து இவற்றின் திருப்பு திறன்களின் கூடுகை $(\bar{r}_1 - \bar{a}) \times F + \bar{r}_2 - \bar{a} \times (-F)$ $= (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times F$. ஆகவே இது $\bar{a}$ ன் சார்பலன் அல்ல. ஆகவே, எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக் கொண்டாலும் சுழலிணையின் திருப்பு திறன் மாறாது எனக்காண்கிறோம். ஆகவே, சுழலிணை ஒரு தனி விசைக்குச் சமமாகாது. ஏனெனில், தனிவிசையின் திருப்பு திறன் புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறலாம். அது செயல்படும் கோட்டிலுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியைச் சார்ந்த திருப்பு திறன் பூச்சியமாகும். இவ்வாறு மாறுபட்ட பண்புடைய தனிவிசைக்குச் சுழலிணை சமமாகாது.

(i) சுழலிணையின் திருப்பு திறன் $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}$ என்பதால் அதன் எண்ணளவு இரு கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள பொதுக் குத்துத் தூரத்தை விசையின் அளவால் பெருக்கவரும் மதிப்பு எனத் தெரிகிறது. படத்தில் இருவிசைகள் செயல்படும் கோடுகளுக்கிடையே யுள்ள குத்துத்தூரம் a-எனக் காட்டப் பட்டுள்ளது. ஆகவே, திருப்பு திறனின் எண்ணளவு Fa ஆகும்.



படம் 40.

(ii) சுழலிணையின் திருப்பு திறன் $(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \times \bar{F}$ $(= \bar{B}\bar{A} \times \bar{F})$ என்றதால் திருப்பு திறன் ஒரு வெக்டர் எனவும், அதன்

திசை $\overline{A}\,B$, F-இவையடக்கும் தளத்திற்கு, அதாவது விசைகள் செயல்படும் திசைக்குக் (வலஞ்சுழி மரபின்படி) குத்தாகவுள்ள திசையாகும் எனவும் வெக்டர் கணிதத்தால் அறிகிறோம்.

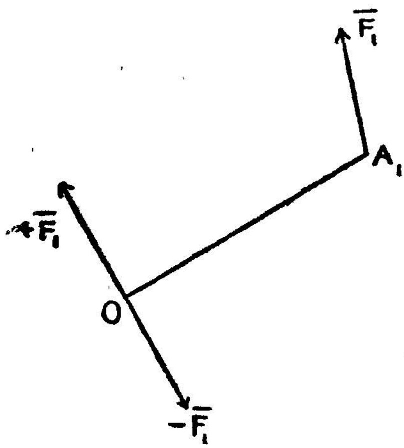
(iii) ஒரே திருப்பு திறன் உடைய இரு சுழலிணைகள் சம விசைத் தொகுதி விசைகளானதால், சமமாகும். ஒன்றால் ஏற்படும் விளைவே மற்றதால் ஏற்படும். ஆகவே, சுழலிணையின் திருப்பு திறன் கட்டிலா வெக்டருக்கு (Free Vector) எடுத்துக் காட்டாகும். சாதாரண வெக்டர் கணிதவிதிகளுக்கு உட்பட்டது [ஆனால் விறை பொருளின் மேல் செயல்படும் தனி விசை கோடமை வெக்டர் (Line bound vector) எனும் கட்டுள்ள வெக்டராகும்].

அன்றியும் சுழலிணையின் திருப்புதிறன் ஒரு வெக்டர் எனவும் தெரிகிறது (வெக்டர் பெருக்கல் பலன், வெக்டராகும்). அந்த வெக்டர் விசைகள் இயங்கும் கோடுகள் வழியுள்ள தளத்திற்குக் குத்தானது என்பதும் தெரிகிறது. A, B என்ற புள்ளிகளில் $\overline{F}$,—F செயல்பட்டால் $\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{F}$ எனும் கோடுகள் அடக்கும் தளத்திற்குக் குத்தாகும் [ஏனெனில், $A\,\overline{B} \times \overline{F}$ என்பது AB-க்கும் $\overline{F}$-க்கும் குத்தான வெக்டர் என வெக்டர் கணிதத்தில் காண்கிறோம்]. சுழலிணையின் விளைவு, அதன் திருப்பு திறனைப் பொறுத்தது : சுழலிணை விசைகள் மாறுபட்டாலும் திருப்புதிறன் அளவிலும் திசையிலும் மாறுபடவில்லை என்றால், சுழலிணை மாறுபடவில்லை எனப்பொருளாகும். வெவ்வேறு இடங்களில், செயல்படும் இரு சுழலிணைகள், ஒரே திருப்பு திறனை உடையன வானால், அவை சமமாகும்.

1-5. ஒரு விறைபொருளின்மேல் செயல்படும் பல விசைகளுக்குச் சமமாக, ஏதேனும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு விசையையும், அத்துடன் சேர்ந்து செயல்படும் சுழலிணையையும் காணமுடியும [இதைப் பல விசைகளை ஒரு புள்ளிக்கு ஒடுக்குதல் (Reduction to a point) எனப்படும்.]

A_1, A_2, A_3 ... Ai என்ற புள்ளிகளில் விசைகள் F_1, $\overline{F}_2$, F_3 ... F_i செயல்படட்டும். O வெனும் புள்ளிக்கு இவ் விசைகளை ஒடுக்குவோம். O வை ஆதியாகக் கொள்ள, A_1, A_2, A_3... எனும் புள்ளிகளின் நிலை வெக்டர்கள் $\overline{r}_1$ $\overline{r}_2$, $\overline{r}_3$... ஆகுக. O எனும் புள்ளியில் $+\overline{F}_1$, $-\overline{F}_1$ எனும் விசைகளைப் புகுத்துக. இதனால் பொருளின் நிலை மாறுபடாது. அதனால் 1 எனும் புள்ளியில்

செயல்படும் விசையின், O-வைச் சார்ந்த திருப்பு திறன் $\bar{r}_1 \times \bar{F}_1$. O என்ற புள்ளியில் செயல்படும் விசை F_1-ம், O_1, A_1 என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் சுழலிணையும் சேர்ந்து, O-வைச் சார்ந்த திருப்பு திறன் $\bar{r} \times \bar{F}_1$ (சுழலிணையின் திருப்பம் மட்டும்). ஆகவே, A_1-ல் செயல்படும் விசை $\bar{F}$-ம், O-ல் செயல்படும் $\bar{F}_1$-ம், சுழலிணை $G_1 = \bar{r}_1 + \bar{F}$-ம் சம விசைத் தொகுதிகளாம்.



படம் 41.

இவ்வாறு A_1-ல் செயல்படும் ஒரு விசை $\bar{F}$-க்குப் பதிலாக O-ல் செயல்படும் $\bar{F}_1$ எனும் விசையையும் சுழலிணை G_1 $(= \bar{r}_1 \times \bar{F}_1)$-ம் கொள்ளலாம். இவ்வாறே A_2, A_3 .. என்ற புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகள் $\bar{F}_2$ F_3 ... இவற்றிற்குப் பதிலாக O-ல் செயல்படும் விசைகள் $\bar{F}_2$ $\bar{F}_3$ ...ம் சுழலிணைகள் G_2 $(=\bar{r}_2 \times \bar{F}_2)$, G_3 $(= \bar{r}_3 \times F_3)$ ... இவற்றைக் கொள்ளலாம்.

∴ **விறை பொருளின் பல புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகள்;** $\bar{F}_1$ $\bar{F}_2$ $\bar{F}_3$ ... $=$ O-வில் செயல்படும் விசைகள் $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, F_3 ... இவற்றின், (வெக்டர் கூடுதல்) தொகுவிசை $\bar{k}$-ம், சுழலிணை G $(= \Sigma G_i)$-ம் ஆகும்.

மீண்டும் கூற O-ல் செயல்படும் சம விசைத் தொகுதி

ஒரு விசை $k = \Sigma \bar{F}_i$

சுழலிணை $\bar{G} = \Sigma \bar{r}_i \times F_i$ கொண்டதாகும்.

1-6. கார்டீசிய உறுப்புக்களில் முடிவுகள்

O எனும் புள்ளியில் $oxyz$ எனும் ஒன்றற்கொன்று குத்தான அச்சுகளைக் கொள்வோம். x, y, z அச்சு திசையில் அலகு வெக்டர்கள் i, j, $\bar{k}$ ஆகுக.

A_1 என்ற புள்ளி $(x_1\ y_1\ z_1)$ ஆகுக. ∴ $\bar{r}_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 \bar{k}$

$\bar{F}_1 \equiv (X_1 i + Y_1 j + Z_1 \bar{k})$ ஆகுக.

$$\bar{r}_1 \times \bar{F}_1 = (y_1 Z_1 - z_1 Y_1)\, i + (z_1 X_1 - x_1 Z_1)\, j + (x_1 Y_1 - y_1 X_1)\, \bar{k}$$ ஆகும்.

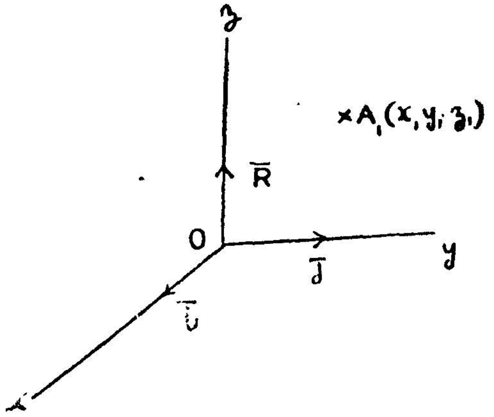
$\therefore$ O-ல் உள்ள தொகுவிசை

$$k = (\Sigma X_1) i + (\Sigma Y_1) j + (\Sigma Z_1) k$$

சுழலிணை

$$G = (\Sigma y_1 Z_1 - z_1 Y_1) i + (\Sigma z_1 X_1 - x_1 Z_1) j + (\Sigma x_1 Y_1 - y_1 Z_1) \bar{k}$$

$\Sigma X_1 = X; \Sigma Y_1 = Y; \Sigma Z_1 = Z$ எனவும்



படம் 42.

$(\Sigma y_1 Z_1 - z_1 Y_1) = L$, $(\Sigma z_1 X_1 - x_1 Z_1) = M$, $(\Sigma x_1 Y_1 - z_1 X_1) = N$ எனவும் கொண்டால்.

O-ல் தொகுவிசை $k = |\bar{k}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ ஆகும்

$G = |\bar{G}| = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$ ஆகும்.

(X, Y, Z, L, M, N) எனும் ஆறு கூறுகள் (Coordinates) விசைத்தொகுதியின் இயக்கக்கூறுகள் (Dyname) எனப்படும்.

விசையின் திசைக்கோசைன் விகிதங்கள் $\left(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}, \frac{Z}{k}\right)$ ஆகும்.

சுழலிணையின் திசைக்கோசைன் விகிதங்கள் $\left(\frac{L}{G}, \frac{M}{G}, \frac{N}{G}\right)$ ஆகும்.

1·7. விறைபொருளின் சமநிலைக்கு வேண்டிய நியதிகள் (Necessary conditions for equilibrium of a rigid body)

பல விசைகள், ஒரு பொருளின் மேல் பல இடங்களில் செயல் பட அது சம நிலையில் இருக்கத் தேவையான நியதிகள் யாவை யென ஆராய்வோம்.

விசைகள் $F_1, F_2, \dots F_i$ என்பவை $A_1 \dots A_2 \dots A_i$ எனும் புள்ளி களில் செயல் படுகிறதெனக் கொள்வோம். ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O-க்குப் புள்ளிகளின் நிலைவெக்டர்கள் $\bar{r}_1\, \bar{r}_2 \dots$ என ஆகுக. இவ் விசைத்தொகுதிக்குச் சமமான விசைத்தொகுதியாக O வழிச் செல்லும் $k = \Sigma \bar{F}_1$ எனும் விசையையும், $G = \Sigma\, \bar{r}_1 \times \bar{F}$ எனும் சுழலிணையையும் காண முடியும். பொருள் சமநிலையில் இருப்ப தால் சுழற்சியும் இல்லை, நீக்கமும் (Translations) இல்லை.

$\therefore k = O \quad G = O$

அதாவது $\Sigma\, F_i = 0 \quad \Sigma\, \bar{r}_1 \times F_i = 0 \quad \therefore$ நியதிகள்:

(i) விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல் பூச்சியம். அதனுடன்

(ii) ஏதேனும் புள்ளியைச் சார்ந்த விசைகளின் வெக்டர் கூடுதலும் பூச்சியம் ஆக இருக்கவேண்டும்.

1-8. கார்டீசியக் கூறுகளில் நியதிகள்

$\bar{k} = Xi + Yj + Z\bar{k}$ ஆகுக.

[i, j, k என்பவை ஒன்றற்கொன்று குத்தான ox, oy, oz எனும் திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள்.]

$\bar{G} = Li + Mj + N\bar{k}$ ஆகுக

$\therefore \bar{k} = 0$ எனின் $\quad X = 0 \;\therefore\; \Sigma\, X_1 = 0 \;(1)$

$Y = 0 \;\therefore\; \Sigma\, Y_1 = 0 \;(2)$

$Z = 0 \;\therefore\; \Sigma\, Z_1 = 0 \;(3)$

அது போன்று $\bar{G} = 0$ எனின் $L = 0 \;\therefore\; \Sigma(y_1 Z_1 - Z_1 Y_1) = 0 \;(4)$

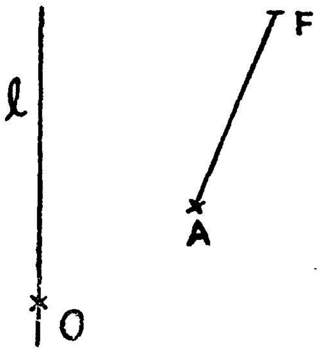
$M = 0 \;\therefore\; \Sigma(Z_1 X_1 - x_1 Z_1) = 0 \;(5)$

$N = 0 \;\therefore\; \Sigma\,(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = 0 \;(6)$

என ஆறு சமன்பாட்டுக்கிணங்கி விசைகள் அமையவேண்டும்.

1-9. கோட்டைச் சார்ந்த விசையின் திருப்புதிறன் (Moment of a force about a line)

$\bar{F}$ எனும் விசை A எனும் புள்ளி வழிக்கோட்டில் செயல்படட்டும். O ஏதேனும் புள்ளியாகுக. O ஐச் சார்ந்த அதன் திருப்பு திறன் $\overline{OA} \times \bar{F}$ என்று கூறினோம். இது ஒரு வெக்டர்; $\overline{OA}$, $\bar{F}$, இவையடக்கும் தளத்திற்குக் குத்தாகவுள்ளது. O வழி l, என்பது கோடாகுக. அதன் திசையில் $\bar{e}$ அலகு வெக்டராகுக. அப்போது $\overline{OA} + \bar{F}\, \bar{i}$ என்பது lஐச் சார்ந்த விசையின் திருப்பு திறன் எனப்படும். இது அளவை முப்பெருக்கியாதலால் வெக்டர் கணியம் அல்ல, வெறும் எண் கணியமே (Scalar) ஆகும்.



படம் 43.

'A' எனும் புள்ளி 'l'-ல் இருந்தால் $\bar{r} = 0$ எனக் கண்டோம்.

பொது விசைகளை O எனும் புள்ளிக்கு ஒடுக்கியதில் O வழியுள்ள $\bar{k}$ எனும் தனி விசையும் G எனும் சுழலிணையையும் கண்டோம். x அச்சைச் சுற்றிய பொது விசைகளின் திருப்பு திறன் $= \bar{k}$, G இவற்றின் x அச்சைச் சுற்றிய திருப்பு திறனாகும். இதில் $\bar{k}$, x அச்சை வெட்டுவதால் திருப்பு திறன் பூச்சியமாகும். G-ன் திருப்புதிறன் $\bar{G}\, \bar{i}$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x \text{ அச்சைச் சுற்றி திருப்பு திறன்} = (L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k}) \cdot \bar{i}$$
$$= L$$

இது போன்று M, N. இவை விசைகளின் முறையே y அச்சு, z அச்சு இவற்றைச் சுற்றிய திருப்பு திறன்களாகும்.

1-10. கார்டீசியக் கூறுகளில் மாறுக் கணியங்கள்

விசைகளின் இயக்கக் கூறுகள் (Dyname) X, Y, Z, L, M, N ஆகுக.

$$\therefore \quad \bar{k} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

$$\bar{G} = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k}$$

முதல் மாறுக் கணியம் $\bar{k}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$

இரண்டாவது மாறுக் கணியம் $\vec{k} \cdot \vec{G}, = LX + MY + NZ$

1-11. கார்டீசியக் கூறுகளில் மைய அச்சு

O எனும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்வோம். அங்கு விசைத் தொகுதி (X, Y, Z, L, M, N) எனும் விசைக் கூறுகளால் தரப் படும்.

$\overline{OO^1} = \bar{r}$ எனும்படி $0'$ ஐக் கொள்வோம்.

O' மைய அச்சில் ஒரு புள்ளியானால் $G - \bar{r} \times \bar{k} = \lambda \bar{k}$ ஆகும்.

$(G' = G - \bar{r} \times \bar{k}$ ஆனதால்)

ஆனால் $G = L\bar{i} + M\bar{j} + N\bar{k}$

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

$$\bar{k} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$$

$$\therefore \quad (L - yZ + zY)\,\bar{i} + (M - zX + xZ)\,\bar{j} + (N - xY + yX)\,\bar{k} = \lambda\,(X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k})$$

$\therefore$ O' எனும் இருக்கும் கோட்டின், அதாவது மைய அச்சின் சமன்பாடு

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{N}$$

ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1

ஒரு விசைத் தொகுதியில் $\bar{F}_1 = 2\bar{i} - 3\bar{k}$, எனும் விசை $(2, 3, -1)$ எனும் புள்ளியில் செயல்படுவதாகவும். $\bar{F}_2 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ எனும் விசை $(-1, 2, 0)$ எனும் புள்ளியில் செயல் படுவதாகவும் உள்ளது இதன் மைய அச்சையும், திருகின் புரியிடையையும் காண்க.

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$F_1 =$	2	0	-3
$F_2 =$	1	-1	1
$\bar{k} = F_1 + F_2 =$	3	-1	-2
$\bar{r}_1 =$	2	3	-1
$\therefore\ r_1 \times \bar{F}_1 =$	-9	4	-6
$r_2 =$	-1	2	0
$\bar{r}_2 \times F_2 =$	2	1	-1
$\therefore\ G = \Sigma \bar{r}_1 \times \bar{k}$	-7	5	-7
$\therefore\ \bar{k} \times G$	17	35	8

$$\therefore \quad \bar{k}\cdot\bar{k} = 9 + 1 + 4 = 14$$

$$\bar{k}\cdot G = -21 - 5 + 14 = -12$$

$$\therefore \text{ புரியிடை } p = \frac{-12}{14} = \frac{-6}{7}$$

மைய அச்சின் திசைக் கோசைன் $\left(\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}\right)$

அது செல்லும் கோட்டில் ஒரு புள்ளி

$$\frac{F \times G}{F^2} = \left(\frac{17}{14}, \frac{35}{14}, \frac{8}{14}\right)$$

அல்லது

$G - \bar{r} \times \bar{k} = \lambda\ \bar{k}$ என்பதிலிருந்து

$$\bar{O} = [-7, 5, -7]$$
$$\bar{r} = [x, y, z]$$
$$\bar{k} = [3, -1, -2]$$
$$\bar{r} \times \bar{k} = [-2y + z, 3z + 2x, -x - 3y]$$
$$\therefore \frac{-7 + 2y - z}{3} = \frac{5 - 3z - 2x}{-1} = \frac{-7 + x + 3y}{-2}$$

என்பது கார்டீசியக் கூறுகளில் மைய அச்சின் சமன்பாடாகும்.

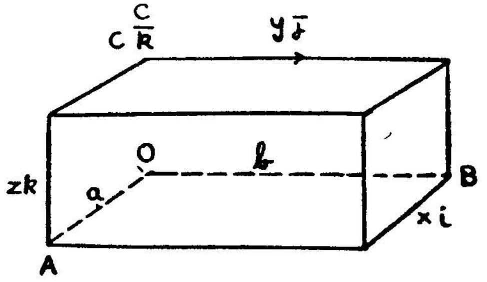
[$\left(\frac{17}{14}, \frac{35}{14}, \frac{8}{14}\right)$ எனும் புள்ளி இதில் அமைவதைக் காணலாம். ஆகவே, கார்டீசிய உறுப்புகளில் மைய அச்சின் சமன் பாட்டை $\frac{14x - 17}{3} = \frac{14y - 35}{-1} = \frac{14z - 8}{-2}$ எனவும் கூறலாம்.]

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு கனச் செவ்வகத்தின் வெட்டாத விளிம்புகள் வழி X, Y, Z எனும் விசைகள் செயல்படுகின்றன. இவை செயல்படும் விளிம்புகளின் நீளங்கள் முறையே. a, b, c ஆகும். விசைகள் தனி விசைக் கொடுக்க முடியுமானல்

$$\frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$$ என இருக்க வேண்டும் என நிறுவுக.

கனச் செவ்வகத்தின் ஒரு முனை O ஆகுக. OA, OB, OC அதன் பக்கங்களாகுக. இந்தத் திசைகளில் அலகு வெக்டர்கள் $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ ஆகுக.



படம் 44.

∴ புள்ளி	விசை
$a\bar{i}$	$Z\bar{k}$
$b\bar{j}$	$X\bar{i}$
$c\bar{k}$	$Y\bar{j}$

$\therefore$ தனி விசை $\bar{k} = Xi + Yj + Z\bar{k}$

சுழலிணை $\bar{G} = aZ(i \times \bar{k}) + bX\ (J \times i) + cY(k \times j)$

$= -(aZj + tX\bar{k} + cYi)$

$= -(cYi + aZj + bX\bar{k})$

தனிவிசைக்கொடுக்க $\vec{k}\ \vec{G} = 0$ ஆக வேண்டும்

$\therefore\ cXY + aYZ + bZX = 0$

$$\therefore\ \frac{a}{X} + \frac{b}{Y} + \frac{c}{Z} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 3

ஒரு நான்முகியின் முனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒவ்வொரு விசை செயல்படுகிறது. விசையின் அளவு, முனைக்கு எதிர்ப் பக்கத்தின் பரப்பளவுடன் நேர் விகிதத்திலும், திசையில் பக்கங்களுக்குக் குத்தாக, வெளி நோக்கியும் இருந்தால், அவை சமநிலையில் உள்ளன என்று காட்டுக.

தீர்வு :

0, A, B, C என்பன நான்முகியின் முனைகளாகுக.

புள்ளி	விசை
O-ல்	$k\ (\bar{AB} \times \bar{AC})$
A-ல்	$k\ (\bar{OC} \times \bar{OB})$
B-ல்	$k\ (\bar{OA} \times \bar{OC})$
C-ல்	$k\ (\bar{OB} \times \bar{OA})$

(i) விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல்

$= \bar{k}\ [(\bar{OC} \times \bar{OB}) + (\bar{OA} \times \bar{OC}) + (\bar{OB} \times \bar{OA})$

$+ (\overline{OB} - \overline{OA} \times \overline{OC} - \overline{OA})$

$= [\bar{OC} \times \bar{OB} + \bar{OA} \times \bar{OC} + \bar{OB} \times \bar{OA} - \bar{OC} \times \bar{OB}$

$- \bar{OB} \times \bar{OA} - \bar{AO} \times \bar{OC}]$

$= 0$

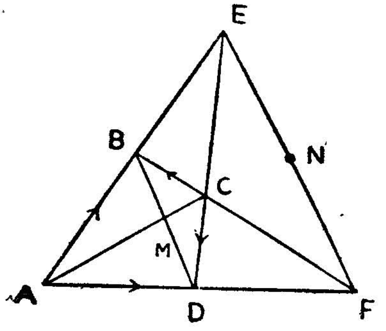
(ii) Oஐச் சுற்றிய திருப்பு திறன்

$\Sigma\ \bar{OA} \times (\bar{OC} \times \bar{OB})$ இதை விரித்தெழுத இதன் தொகை பூச்சியம் எனக் காணலாம். O விற்கு ஒடுங்கிய தனி விசையும் சுழலிணையும் பூச்சியம். ஆதலால், விசைகள் சமநிலையில் உள்ளன.

[கோடுகளில் செயல்படும் விசைகள் கட்டுடை வெக்டர் களாகும். ஒரு கோட்டில் செயல்படும் வெக்டர் F-க்குச் சமமல்ல. இதைப்பயன்படுத்தி ஒருவரை கணிதத்தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.]

ஒரு முழு நாற்கரத்தின் மூலை விட்டங்களின் நடுப்புள்ளிகள் ஒரு கோடமைவனவாகும்.

$\bar{AB}, \bar{AD}, \bar{CB}, \bar{CD}$ எனும் நான்கு விசைகளைக் கொள்க. AC, BD, EF-ன் நடுப்புள்ளிகள் L, M, N ஆகும். நான்கு விசை களும் சமதள விசைகளானமையால், அவை ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்கும்.



படம் 45.

$$\bar{AB} + \bar{AD} + \bar{CB}\ \bar{CD} = 2\bar{AM} + 2\bar{CM}$$

$\therefore$ தனிவிசை M வழிச் செயல்படும்.

இதேபோல் $\bar{AB} + \bar{CB} + \bar{CD} + \bar{AD} = 2\bar{LB} + 2\bar{LD}$

அவ்விசை L வழியும் செயல்படும்.

ஆனால் $\bar{AB} + \bar{AC} + \bar{CB} + \bar{CD} = (\bar{AB} + \bar{EB}) + (\bar{AF} + \bar{FD})$

$$+ (\bar{CF} + \bar{FB}) + (\bar{CE} + \bar{ED})$$

$$= (\bar{AE} + \bar{AF}) + (\bar{CE} + \bar{CF})$$

$$+ (\bar{EB} + \bar{FB}) + (\bar{FD} + \bar{ED})$$

$$= 2\bar{AN} + 2\bar{CN} + 2\bar{NB} + 2\bar{ND}$$

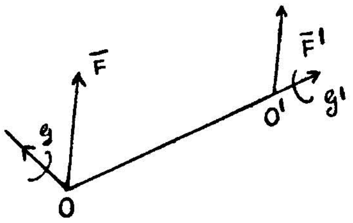
$\therefore$ தனி விசை N வழியும் செயல்படும்.

$\therefore$ L, M, N ஒரு கோடமைவன ஆகும்.

1-11. மாருக் கணியங்கள் (Invariants)

பலவேறு புள்ளிகளில் செயல்படும் விசைகளை ஒரு புள்ளிக்கு ஒடுக்கிறோம். வெவ்வேறு புள்ளிகளுக்கு ஒடுக்கும்போது வரும். வரும் ஒடுக்கங்கள், எவ்வாறு மாறுபடுகின்றன எனப் பார்ப்போம்.

O எனும் புள்ளிக்கு ஒடுக்கப்பட்ட விசைத் தொகுதி $\bar{k}$ எனும் விசையும், $\bar{G}$ எனும் சுழலிணையும் ஆகும்.



படம் 46.

O' எனும் மற்ருெரு புள்ளிக்கு ஒடுக்கப்பட்ட மற்ருெரு விசை தொகுதி $\bar{k}^1$ம் G^1ம் ஆகுக. இவை சமவிசைத் தொகுதிகளான தால் (i) விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல் சமம்; (ii) O' ஐச் சார்ந்த திருப்பு திறனும் சமம்.

$$\therefore \quad \bar{k}' = \bar{k} \quad \therefore \quad \bar{k}'^2 = \bar{k}^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\bar{G}' = \bar{G} \quad + \quad \overline{O'O} \times \bar{k}$$

O'-ன் O வைச் சார்ந்த நிலை வெக்டர் $\bar{s}$ என்ருல், $\overline{O}\,\overline{O'} = s$

$$\therefore \overline{O'}\,\overline{O} = -s$$

$$\therefore G' = \bar{G} - \bar{s} \times \bar{k} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவ்வாறு ஒரு புள்ளி O-லிருந்து $\bar{s}$ எனும் நிலை வெக்டருடைய மற்ருெரு புள்ளிக்கு மாற்றும் போது தனி விசை மாறுவதில்லை எனக் காண்கிருேம். சமன்பாடு இரண்டின் இரு புறத்தையும் $\bar{k}$ ஆல் 'புள்ளி'ப் பெருக்கல் செய்ய ($\bar{k} = \bar{k}'$ ஆன தால்) $G' \cdot \bar{k}' = G \cdot \bar{k} - \bar{s} \times \bar{k}, \bar{k}$. ஆனுல் $\bar{s} \times \bar{k} \cdot \bar{k} = 0$

$\therefore \quad G' \cdot \bar{k}' = \bar{G} \cdot \bar{k} \quad \therefore \quad \bar{k}^2$ என்பது முதல் மாருக்கணியம்.

$\bar{G} \cdot \bar{k}$ என்பது மற்ருெரு மாருக்கணியம். பல்வேறு புள்ளிகளுக்கு ஒடுக்க, (i) விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல் மாறுவதில்லை. (ii) சுழலிணை மாறினும், விசை திசையில, திருப்பு திறனின் பிரிவு மாறுவதில்லை என இரு மாருக் கணியங்கள் உள்ளன.

1-12. "புவன்சோ"வின் மைய அச்சு (Poinsot's Central Axis)

பல விசைகளை ஒரு விசைக்கும், சுழலிணைக்கும் ஒடுக்கும் போது, விசை வெக்டரின் திசையும், சுழலிணை வெக்டரின் திசையும் ஒன்றாக இருக்க வேண்டுமென்பதில்லை. ஆனால், இரு திசைகளும் ஒன்றாக இருக்கக் கூடிய புள்ளிகளும் உண்டு எனவும், அவை ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ளன என்றும் காட்டுவோம். அத்தகைய நேர்கோடு, 'புவன்சோவின்' மைய அச்சு எனப்படும். விசை, சுழலிணை இவற்றின் திசைகளும் அந்த நேர் கோட்டுத் திசையிலேயே அமையும்.

நிரூபணம் :

ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O விற்கு விசைகளை ஒடுக்க அதன் வழிச் செல்லும் தனி விசை $\bar{k} = \Sigma \bar{F}_1$-ம், சுழலிணை $\bar{G} = \Sigma \bar{r}_1 \times \bar{F}_1$-ம் வருகிறது.

$0'$ எனும் புள்ளியின் நிலைவெக்டர் $\overline{OO'} = \bar{s}$ ஆகுக. அங்குள்ள தனிவிசை $\bar{F}'$, சுழலிணை $\bar{G}'$ என்றால் $\bar{k}' = \bar{k}$

$$\bar{G}' = \bar{G} - \bar{s} \times \bar{k}'$$

$$\therefore \quad \bar{G}' = \bar{G} - \bar{s} \times \bar{k}$$

$0'$ எனும் புள்ளியில் $\bar{G}'$ன் திசையும் $\bar{F}'$ன் திசையும் ஒன்றானால்

$$\bar{k}' \times \bar{G}' = 0$$

$$\therefore \quad \bar{k} \times \bar{G}' = 0$$

$$\therefore \quad \bar{k} \times (\bar{G} - \bar{s} \times \bar{k}) = 0$$

$$\therefore \quad \bar{k} \times \bar{G} - \bar{k} \times (\bar{s} \times \bar{k}) = 0$$

$$\therefore \quad \bar{k} \times \bar{G} - (\bar{k} \cdot \bar{k})\, \bar{s} + (\bar{k} \cdot \bar{s})\, \bar{F} = 0$$

$$\therefore \quad (\bar{k} \cdot \bar{k})\bar{s} = \bar{k} \times \bar{G} = (\bar{k} \cdot \bar{s})\, \bar{F} = 0$$

$$\therefore \quad \bar{s} = \frac{\bar{k} \times \bar{G}}{|\bar{k}|^2} + \frac{\bar{k} \cdot \bar{s}}{|\bar{k}|^2}\, \bar{k}$$

$\dfrac{\bar{k} \times \bar{G}}{|\bar{k}|^2}$ என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட வெக்டர். $\dfrac{\bar{k} \cdot \bar{s}}{|\bar{k}|^2}$ என்பது புள்ளி O' மாறும்போது மாறும் திசையிலி. இதை 't' என்போம்.

$\therefore$ Oஐ ஆதியாகக் கொண்டு O'-ன் நிலையைத் தரும் $\bar{s}$ எனும் வெக்டர்

$\bar{s} = \frac{\bar{k} \times \bar{G}}{\bar{k}^2} + t\ \bar{k}$ எனும் சமன்பாட்டிற்கு இணங்கியது.

$\therefore$ O' என்பது $\overline{OA} = \frac{\bar{k} \times \bar{G}}{\bar{k}^2}$ எனும் நிலை வெக்டரை யுடைய $A\bar{k}$ எனும் புள்ளி வழி (Poinsot's Centre) $\bar{k}$ திசையில் செல்லும் கோட்டில் எங்கு வேண்டுமாயினும் அமையலாம். அந்தப் புள்ளிகளில் $\bar{k} \times \bar{G}' = 0$ அமையும். அதாவது விசையின் திசையும், சுழலிணையின் திசையும் ஒன்றாகும். இத்தகைய விசைத் தொகுதி திருகு அச்சு (Wrench) எனப்படும். அது செயல்படும் கோடு புவன்சோவின் மைய அச்சு (Poinsot's Central Axis) எனப் படும். திருகில் செயல்படும் சுழலிணையும் $\bar{\Gamma}$ (காமா) எனக் குறிப்போம்.

திருகின் புரியிடை (Pitch of the Wrench)

சுழலிணை $\bar{G}$-ம், தனி விசை $\bar{F}$-ம் ஒரே திசையுடையனவாய்த் திருகில் அமைவதால் $\bar{\Gamma} = p\bar{k}$ எனலாம். அப்போது p என்பது திருகின் புரியிடை எனப்படும்.

$$\therefore\ \bar{\Gamma} = p\ \bar{k} \cdot \bar{k}$$

$$\therefore\ p = \frac{\bar{\Gamma} \cdot \bar{k}}{\bar{k}^2} \left(\text{அல்லது } \frac{\bar{G} \cdot \bar{k}}{\bar{k}^2} \right)$$

$\bar{G} \cdot \bar{k}$ என்பதும், $\Gamma\ \bar{k} \cdot \bar{k}$-ம் மாறுக்கணியம் என்கிறோம்.

மாற்று வழி

திருகின் புரியிடையை மற்றொரு வழியிலும் காணலாம்.

0 எனும் புள்ளியில் உள்ள $(\bar{k}, \bar{G})$ எனும் விசை தொகுதி O'-ல் உள்ள $(\bar{k}, \bar{G}')$-க்குச் சமமாகுக.

$\bar{G}' = p\ \bar{k}$ ஆகுக.

$$\therefore\ \bar{G} = \overline{OO'} \times \bar{k} + p\ \bar{k} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\therefore\ \bar{G} \cdot \bar{k} = p\ \bar{F}^2$$

$$\therefore\ p = \frac{\bar{G} \cdot \bar{k}}{\bar{k}^2}$$

சமன்பாடு (1)ஐ $\bar{k}$-ல் வெக்டர் பெருக்கல் செய்ய,

$$\bar{G} \times k = (\overline{OO'} \times \bar{k}) \times \bar{k} + p\ (\bar{k} \times \bar{k})$$

$$= -\bar{k}^2\,\bar{OO'} + (\bar{k}\cdot\bar{OO})\bar{k}$$

$\therefore\ \overline{OO} = \dfrac{\bar{k}\times\bar{G}}{\bar{k}^2} \times t\,\bar{k}$. என மைய அச்சு வருகிறது.

ஒரே திருகு உளது என நிறுவ (Uniqueness of wrench equivalent to a given system)

$\bar{O}$-ல் அமைந்த திருகின் விசை $\bar{k}$; சுழலிணை $p\,\bar{k}$ ஆகுக.

O'' வழி $(\bar{k}'\,p'\,\bar{k}')$ எனும் திருகு அமையட்டும்.

$(\bar{k}, p\,\bar{k})$-ம் இதுவும் சம விசைத் தொகுதிகள் ஆனதால்
(i) $\bar{k}' = \bar{k}$ (ii) O' ஐச் சுற்றிய திருப்பு திறனும் சமம்.

$$\therefore\ p\,\bar{k} = O'\,O'' \times \bar{k} + p'\,\bar{k}$$

$\bar{k}$-ஆல் புள்ளிப் பெருக்கல் செய்ய $p = p'$

$\therefore\ 0'\,00'' \times \bar{k} = 0$ ஆனால் $\bar{k} \neq 0$

$\therefore$ 0′ வழி, $\bar{k}$.ன் திசையில் 0″ உள்ளது. அதாவது, அதே மைய அச்சில் ⊂″ அமைகிறது. ஒரு விசைத் தொகுதிக்கு ஒரே ஒரு திருகு உள்ளது எனக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு 1: $\bar{G}\cdot\bar{k} = 0$ என இரண்டாவது மாறுக் கணியம் மட்டும் பூச்சியமானால், திருகின் விசையின் திசையில் உள்ள சுழலிணை பூச்சியம். ஆனால், திருகில் விசையில் திசையில் மட்டுமே சுழலிணை உள்ளது. ஆகையால் விசைத் தொகுதி, ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்குகிறது.

$\bar{k}^2 = 0$ என முதற் கணியம் மட்டும் பூச்சியமானால், ஒரு சுழலிணைக்கு ஒடுங்குகிறது.

குறிப்பு 2: விசைகள் யாவும் ஒரு சமதளத்தில் அமைந்தால் $\bar{G}\cdot\bar{k} = 0$. ஆகவே, சமதள விசைகள் $\bar{k}^2 \neq 0$ என்றால், ஒரு விசைக்கு ஒடுங்கும். $\bar{k} = 0$ என்றால் சுழலிணைக்கு ஒடுங்கலாம் அல்லது சமநிலையில் இருக்கலாம்.

பயிற்சி

1. $ABCD$ என்ற நான்முகியின் BA, BC, DA, DC எனும் விளிம்புகள் வழி ஆவற்றுடன் தலைகீழ் விகிதத்தில் உள்ள அளவுகளில் விசைகள் செயல்படுகின்றன. அவை யாவும் ஒரு தனி விசைக்கு ஒடுங்கினால் $AD\cdot BC = AB\cdot CD$ ஆகும் என்று நிறுவுக.

2. $A, B, C, D, A', B', C', D'$ எனும் 8 புள்ளிகள். முதல் நான்கு புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தின் முனைகளாகவும், மற்ற நான்கு புள்ளிகள் இன்னொரு சதுரத்தின் முனைகளாகவும் அமைகின்றன.

$\overline{AA^1}$, $\overline{B^1B}$; $\overline{CC^1}$; $\overline{D^1D}$ எனும் நான்கு விசைகள் ஒரு விறை பொருளின் மேல் செயல்பட அது சம நிலையில் இருந்தால், இரு சதுரத்தளங்களும் ஒன்றற்கொன்று இணையாக இருக்கவேண்டு மென நிறுவுக.

3. $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}, \overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}$ என்பவை ஓர் ஒழுங்கு (Regular) நான்முகி $ABCD$-ன் மேல் செயல்படும் விசைகள். அவற்றின் மைய அச்சு D வழி ABC தளத்திற்கு செங்குத்து எனவும், விசைகளுக்குச் சமமான திருகின் புரிவிடை தூரம் $\frac{\sqrt{2}}{4}$ மடங்கு விளிம்பின் நீளம் எனவும் நிறுவுக.

4.

விசை	செயல்படும் புள்ளி	திசை விகிதம்
$5\sqrt{2}$	$(0, 0, \frac{1}{5})$	$3 : 4 : -5$
$3\sqrt{11}$	$\frac{1}{3}, 0, 0$	$5 : 5 : -7$
$\sqrt{11}$	$0, \frac{1}{4}, 0$	$-3, : 1 : 1$

என விசைத் தொகுதியுள்ளது. இது தனிவிசைக்கொடுக்கும் என நிறுவுக.

5. X, Y, Z எனும் விசைகள்

$y = 0, z = c; z = 0, x = a; x = 0, y = b,$

எனும் சமன்பாடுகளுடைய கோடுகள் வழி செயல்படுகின்றன. இவற்றிற்குச் சமமான திருகின் புரியிடை தூரம்

$$\frac{aYZ + bZX + cXY}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

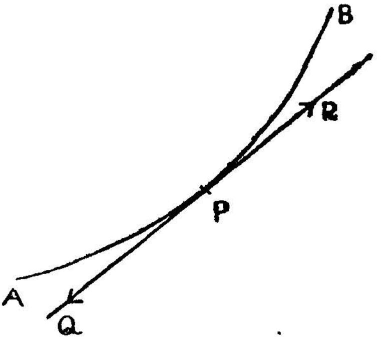
என நிறுவுக.

2. சங்கிலியம்

(CATENARY)

2-1. வரையறை

சங்கிலியம் என்றால் என்ன என்பதை முதலில் திட்டமாகக் கூறுவோம். இது ஒரு பரிமாணப் பொருள் தொகுதியாகும். அதாவது பரப்பு, கனம் இவையில்லாத நீளமாக மட்டும் அமைந்திருக்கும் பொருள் தொகுதி, ஒரு வளைவரையாக அமையும்.



படம் 47.

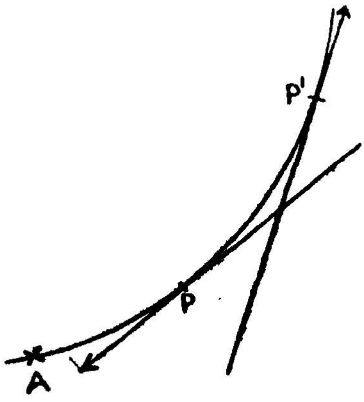
இதில் உள்ளுறு விசை இழு விசையாக மட்டும் இருக்கும். *AB* என்பது அத்தகைய பொருள் தொகுதியின் ஒரு பாகமாகுக. அதில் P எனும் புள்ளி, அதை AP, BP என இரு பாகமாகப் பிரிக்கிறது. P-ல் உள்ளுறு விசை வளைவரைக்கு P-ல் உள்ள தொடு கோட்டின் மேல் அமையும். AP-யினால் BP-ல் செயல்படும் விசை PQ திசையிலும், BP-யினால் AP-ல் செயல்படும் விசை PR திசையிலும் உள்ளது. இது இழு விசையாகும். தொடு

கோட்டிற்குக் குத்தாக உள்ளூறு விசை இல்லை. இத்தகைய கட்டுப்பாட்டிற்கு உள்பட்ட சங்கிலியம் எனும் பொருள் தொகுதிமேல் புறவிசைகள் செயல்பட, அது நிலையாக இருக்கவேண்டிய நியதிகளைக் காண்போம்.

சாதாரண நூல், கயிறு, சங்கிலி, தந்திக்கம்பி, இவை போன்றவை ஏறக்குறைய மேற்கூறிய இலட்சியப்பொருள் தொகுதியாகிய சங்கிலியத்திற்கு ஒத்ததாகும். கணக்குகளில் இவற்றைப் பயன்படுத்துவோம்.

புறவிசைகள் செயல்பட, சங்கிலியத்தின் சமநிலை (Equilibrium of strings)

சங்கிலியம் அமையும் வளைவரையில் நிலையான ஒரு புள்ளியாகுக. சங்கிலியத்தில் P எனும் புள்ளிக்கு A-லிருந்து அதன் மேலாக உள்ள தூரம் s ஆகுக. P-க்கு மேல், நுண்ணிய தூரத்தில் P' எனும் புள்ளியைக் கொள்க. PP' எனும் வில்லின் நீளம் δs ஆகுக.



படம் 48.

δs எனும் பாகத்தின்மேல் செயல்படும் விசைகளைப் பார்ப்போம். (*i*) அலகு நீளத்திற்குச் செயல்படும் புறவிசை $\bar{F}$ என்றால் δs-ன் மேல் செயல்படும் புறவிசை $\bar{F}\,\delta s$. (*ii*) P-ல், சங்கிலியத்தின் AP பாகத்தினால் செயல்படும் இழுவிசை $-T\bar{i}$. $\bar{i}$ என்பது P-ல் உள்ள தொடுகோட்டில் அமையும் அலகு வெக்டர். அதற்கு எதிர்த் திசையில் இழுவிசை T செயல்படுவதால், இழு விசை வெக்டர் $-T\bar{i}$. (*iii*) P'-ல் செயல்படும் இழுவிசை

$(T+\delta T)\ (\bar{t}+\delta\bar{t})$ [P-லிருந்து P' δs தூரம் அதிகமாவதால், இழுவிசை T-ல் δT மாறுதலும், வெக்டர் t-ல் δt மாறுதலும் ஏற்படுகிறது. மற்றும், விசை தொடுகோட்டுத் திசையிலேயே உள்ளது.

இந்த மூன்று விசைகள் செயல்பட δs சமநிலையில் இருப்பதால், விசைகளின் வெக்டர் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\quad \bar{F}\,\delta s-T\bar{t}+(T+\delta T)\ \bar{t}+\delta\bar{t})=0$$

$$\bar{F}\,\delta s+T\,\delta\,\bar{t}+\delta\,Tt+\delta T\,\delta\bar{t}=0$$

δs ஆல் வகுத்து $\delta s\to 0$ ஆகும்போது எல்லைகாண.

$$\bar{F}+T\frac{d\bar{t}}{ds}+\frac{dT}{ds}\,\bar{t}=0 \qquad \dots\ \dots\ (1)$$

$$\therefore\quad \bar{F}+T\,k\bar{n}+\frac{dT}{ds}\,\bar{t}=0$$ [$\bar{k}$ என்பது P-ல் வளைவு]

$\left[\frac{d\bar{t}}{ds}=\frac{d\bar{t}}{d\psi}\cdot\frac{d\psi}{ds};\right.$ ஆனால் $\frac{dt}{d\psi}=\bar{n}$ தொடு கோட்டின் செங்குத்தான கோட்டில் அலகு வெக்டர் $\left.\frac{d\psi}{ds}=k\right]$

$$\bar{F}+\frac{T}{\rho}\,\bar{n}+\frac{dT}{ds}\,\bar{t}=0 \qquad \dots\ \dots\ (2)$$

$\therefore$ புறவிசைகளின் தொகு விசையானது. தொடுகோடும் முக்கிய செங்கோடும் அடக்கும் வளைவுச் சமத்தளத்தின் (Plane of Curvature) செயல்படவேண்டும் எனக் காண்கிறோம்.

$\bar{F}=F_1\,\bar{t}+F_2\,\bar{n}$ என்றிருந்தால்

$$\left(F_1+\frac{dT}{ds}\right)\bar{t}+\left(F_2+\frac{T}{\rho}\right)\bar{n}=0$$

$$\therefore\ (F_1+\frac{dT}{ds}=0 \qquad F_2+\frac{\Gamma}{\rho}=0 \qquad \dots\ \dots\ (3)$$

(F_1 என்பது புறவிசைகளின் தொடு கோட்டுப் பிரிவு. F_2 என்பது அவற்றின் உள் செங்கோட்டுப் பிரிவு.)

குறிப்பு: F_1 வளரும் வில் (increasings) திசையில் அளக்க வேண்டும்; F_2 உள்ளிட்ட செங்கோட்டு திசை (inward normal)

யில் அளக்கவேண்டும். இச் சமன்பாடுகளைக் கணக்குகளில் அடிக்கடிப் பயன்படுத்துவோம்.

கார்டீசியக் கூறுகளில் சமன்பாடு

சமன்பாடு (1) மீண்டும் எழுதுவோம்.

$$F + T\frac{d\bar{t}}{ds} + \frac{dT}{ds}\bar{t} = 0$$

$$\therefore \quad F + \frac{d}{ds}(T\bar{t}) = 0$$

x, y, z எனும் அச்சுக்கள் திசையில் F-ன் பிரிவுகள் X, Y, Z ஆகுக.

$\bar{t}$-ன் பிரிவுகள் $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

$$X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

$$Z + \frac{d}{as}\left(T\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

என சமநிலைச் சமன்பாடு கார்டீசியன் கூறுகளில் வருகிறது.

குறிப்பு 1 : புறவிசைகள் ஏதும் செயல்படவில்லை என்றால்

$$\frac{d}{ds}(T\bar{t}) = 0$$

$$\therefore \quad T\bar{t} = \bar{C} \quad (\text{நிலை வெக்டர்})$$

அதாவது சங்கிலியத்தில் எங்கும் இழுவிசை மாறாதிருக்கும். தொடுகோடும் திசை மாறாது. அதாவது சங்கிலியம் நேர் கோட்டில் அமையும். எடுத்துக்காட்டாக, வழவழப்பான சமதளத்தில் அமையும் சங்கிலியத்தின் இருமுனைகளிலும் இழுவிசை செயல்பட, அது நேர்கோட்டில் எங்கும் ஒரே இழுவிசையுடன் இருக்கும்.

குறிப்பு 2 : வழவழப்பான வளை தலத்தில் அமைந்த சங்கிலியத்தின்மீது தலத்தின் தாங்கு விசை (Reaction) யல்லாது

வேறு விசை இல்லை எனக் கொள்வோம். தாங்கு விசையும் வெளிச் செங்கோட்டு (Outward normal) திசையில் ஆகுக.

தாங்கு விசை k என்றால் செங்கோட்டு திசையில்

$F_2 + \frac{T}{\rho} = 0$ எனும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த

$$-k + \frac{T}{\rho} = 0 \therefore \; k = \frac{T}{\rho}$$

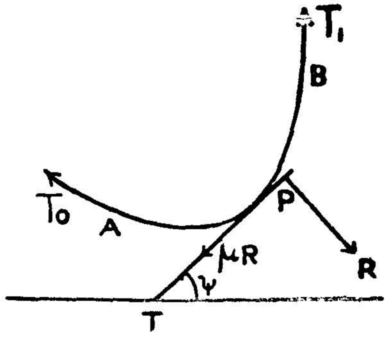
தொடுகோட்டுத் திசையில் '$F_1 + \frac{dT}{ds} = 0$' எனும் சூத்திரத்தில்

$$F_1 = 0 \quad \therefore \quad \frac{dT}{ds} = 0 \quad \therefore \quad T = \text{மாறு எண்.}$$

∴ இவ்வாறு அமையும் சங்கிலியத்தில் எங்கும் தாங்கு விசை, வளையின் வளைவுடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும்.

ஒரு வட்டவில்லை ஒட்டினாற்போல் சமநிலையில் உள்ள நூலின் இரு முனையிலும் இழுவிசை செயல்பட்டால், நூலெங்கும் இழுவிசை சமமாக இருக்கும். வில்லின் அழுத்தம் நூலின் மேல் எங்கும் சமமாய் இருக்கும். ஏனெனில், வட்டத்தில் வளைவு எங்கும் சமமாதலால்.

எடுத்துக்காட்டு



படம் 49.

உராய்வுத்தலத்துடன் ஒன்றி வளை வரையில் அமையும் ஒரு கயிற்றின் இருமுனைகளிலும் இழுவிசைகள் செயல்படுகின்றன. வேறு புறவிசைகள் இன்றி, கயிறு எல்லைச் சமநிலையில் (Limiting

equilibrium) இருந்தால், இரு முனைகளிலும் உள்ள இழு விசைகளை ஒப்பிடுக.

தீர்வு

(i) படவிளக்கம் : AB என்பது கயிறு. P என்பது அதில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. TP என்பது P-ல் தொடுகோடு. ஏதேனும் ஒரு கோட்டுடன் ψ எனும் கோணச்சாய்வில் உள்ளது.

A, B என்ற நுனிகளில் உள்ள தொடுகோடுகள் α, β எனும் கோணச்சாய்வில் உள்ளன.

(ii) புறவிசைகள் : இங்குப் புறவிசைகள்

(i) PT எனும் திசையில் எல்லை உராய்வு விசை F.

(ii) வெளி செங்கோட்டுத் திசையில் தாங்குவிசை k. இவை மட்டும் புறவிசைகள்.

$$\therefore \quad F = \mu k.$$

சமநிலைச் சமன்பாடு

$$\frac{dT}{ds} = \mu k.$$

$$\frac{T}{\rho} = k.$$

$$dT = \mu k \; ds. \quad \rho = \frac{ds}{d\psi}$$

ஆனதால் $T = k \dfrac{ds}{d\psi}$

$$\therefore \quad \frac{dT}{T} = \mu d\psi.$$

$$\therefore \quad \log T = \mu\psi + C$$

$$\therefore \quad T = e^{(\mu\psi + C)}$$

இது கயிற்றில் வெவ்வேறிடத்தில் உள்ள இழுவிசையாகும்.

A எனும் இடத்தில் T_A இழுவிசை ; $\psi = \alpha$

$$\therefore \quad T_A = e^{(\mu\alpha + C)}$$

B எனும் நுனியில் T_B இழுவிசை ; $\psi = \beta$

$$\therefore \quad T_B = e^{(\mu\beta + C)}$$

$$\therefore \quad \frac{T_B}{T_A} = e^{\mu(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore \quad \underline{T_B = T_A e^{\mu(\beta - \alpha)}}$$

[$\beta - \alpha$ என்பது A-லிருந்து B-க்குச் சுற்றி வரும்போது கயிற்றில் ஏற்படும் திசை மாறுதல்.]

குறிப்பு: ஒரு வட்டத்தூணைச் சுற்றி மூன்று முறை சுற்றப் பட்டு கயிற்றின் இரு முனைகளையும் இழுத்தால், கயிறு இயங்கும் தறுவாயில் அவையிடையே உள்ள இழுவிசைகளை ஒப்பிடுக. $\mu = \cdot 5$ எனக் கொள்க.

இங்கு கோணமாற்றம் 6π ரேடியன்.

$$\therefore \quad T_B = T_A \; e^{\cdot 5 \times 6\pi}$$

$$\therefore \quad \frac{T_B}{T_A} = e^{3\pi}$$

$$\log_{10} \frac{T_B}{T_A} = 4 \cdot 093 \; [3\pi \times \log_{10} e = 3\pi \times \cdot 4543]$$

$$\therefore \quad \frac{T_B}{T_A} = 12400 : 1$$

நிலைத் தளத்தில் அமையும் சங்கிலியங்கள்

ஒரு வழவழப்பான AB எனும் வளை வரையில் சமநிலையில் நிலைத் தளத்தில் ஒரு சங்கிலியம் உள்ளது. P என்பது அதில் ஒரு புள்ளியாகுக ; P-ன் கூறுகள் (x, y) ஆகுக.

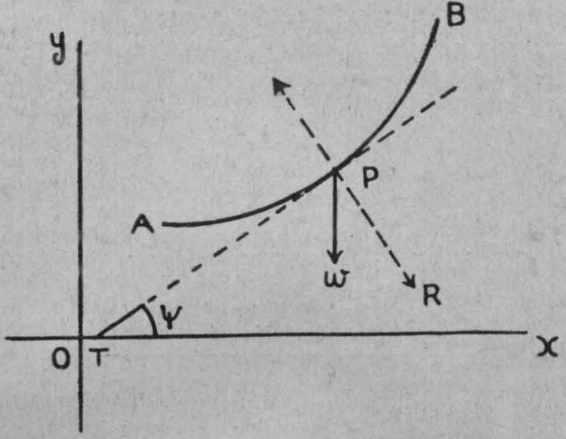
TP வளைவரைக்குத் தொடுகோடாகுக. Ox எனும் x அச்சுடன் TP-ன் சாய்வு ψ ஆகுக

A, B என்ற இரு நுனிகளிலும் இழுவிசைகள் உள்ளன.

புறவிசைகள்

(i) அலகு நீளச் சங்கிலியத்தில் செயல்படும் புவியீர்ப்பு விசை w நேர் கீழாக.

(*ii*) *P*-ல் வெளிச் செங்கோட்டுத் திசையில் செயல்படும் தாங்குவிசை *k*.



படம் 50.

சமநிலைச் சமன்பாடு

TP எனும் தொடுகோட்டுத் திசையில்

புறவிசை $-w \sin \psi$;

வெளிச் செங்கோட்டு திசையில் $k + w \cos \psi$

$$\therefore \quad \frac{dT}{ds} - w \sin \psi = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{T}{\rho} - (+w \cos \psi)k = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\sin \psi = \frac{dy}{as} \quad \cos \psi = \frac{dx}{as}$$

$$\therefore \quad (1)\text{-லிருந்து} \quad \frac{dT}{ds} = w \frac{dy}{ds}$$

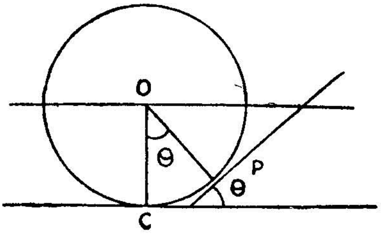
$$dT = w\, dy$$

$$\therefore \quad T = wy + C$$

∴ சங்கிலியத்தில் ஏதேனும் ஓர் இடத்தில் இழுவிசை தரப்பட்டால், மற்ற இடங்களில் இழுவிசையை இந்தச் சமன்பாட்டால் காணலாம். சமன்பாடு (2)-லிருந்து தாங்கு விசையை அதிலிருந்து காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

ஒரு சீரான சங்கிலி ஒரு வட்ட உருளையைச் சுற்றி ஒட்டினால் போல் முனைகளின்றி சமநிலையில் அமைந்துள்ளது. உருளை உராய்வற்றதும், சங்கிலியின் கீழ்ப்புள்ளியில் தாங்குவிசை இல்லாமலும் இருந்தால், சங்கிலியின் மேல் பாகத்தில் இழுவிசை என்ன ?



படம் 51.

சங்கிலியில் P ஒரு புள்ளியாகுக. கீழ்ப் புள்ளி C; உருளை மையம் 0; $\angle COP = \theta$.

மேற்கூறிய கணக்கிலிருந்து

$$T = wy + C \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

CO-வை y அச்சாகவும் C ஐ ஆதியாகவும் கொள்க.

இரண்டாவது சமன்பாடு

$$\frac{T}{\rho} = k + w \cos\psi$$

இங்கு $\psi = \theta$; $\theta = 0$ ஆகும்போது $K = 0$

$\rho = a \quad \therefore \quad T_C = a w$ (கீழ்ப் புள்ளி C-ல்).

$\therefore$ (1)-ல் $y = 0$ என்றால் $T_C = aw \quad \therefore \quad C = aw$

இழுவிசை $T = wy + aw$

$\therefore$ மேற்புள்ளியில் $y = 2a$

$\therefore$ அங்கு இழுவிசை $= \underline{3\,aw}$

மாற்று வழி

அடிப்படைக் கொள்கையிலிருந்தே கணக்கைப் போடலாம். புறவிசைகள் (i) அலகு நீளத்திற்கு எடை w நேர் கீழ் (ii) தாங்கு விசை k, $0P$ என்ற திசையில்

$\therefore \quad \frac{dT}{ds} - w \sin \theta = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (1)$

$\frac{T}{a} - (k + w \text{ Cos } \theta) = 0 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$

ஆனால் $ds = a\, d\theta$

$\therefore \quad dT = aw \sin \theta\, d\theta$

$\therefore \quad T = C - aw \text{ Cos } \theta.$

சமன்பாடு (2)-லிருந்து $(\theta) = 0$ ஆகும்போது $k = 0$ ஆனதால்

C-யில் $T_C = aw$

$\therefore \quad T_C = C - aw = aw \quad \therefore \quad C = 2\, aw$

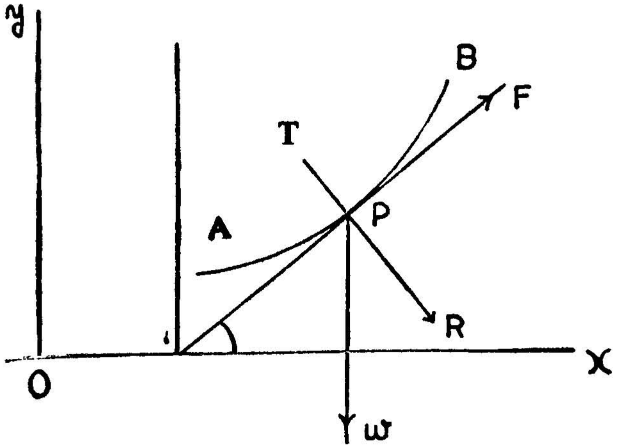
$\therefore \quad T = 2\, aw - aw \cos \theta.$

$\therefore$ மேற்புள்ளியில் $\theta = 180°$

$\therefore \quad T = 3\, aw$

சீரான அடர்த்தியுள்ள சங்கிலியம் நிலைத் தளத்தில் உராய்வுள்ள வளைவரையில் எல்லைச் சமநிலையில் அமையும்போது, இழுவிசையும் தாங்கு விசையும் காண.

பட விளக்கம்



படம் 52.

AB வளைவரையில் அமையும் சங்கிலியம் ஆகுக. P அதில் ஒரு புள்ளி. PT தொடு கோடு.

O x-எனும் *x* அச்சுடன் *PT*-ன் சாய்வு ψ.

புற விசைகள்

(i) அலகு நீளத்திற்கு எடை *w* நேர் கீழாக

(ii) தாங்கு விசை *k* வெளிச் செங்கோட்டுத் திசையில்

(iii) தொடுகோட்டு திசையில் எல்லை உராய்வு *F*

$\therefore \quad F = \mu k$

சங்கிலியத்தின் இயக்கம் *BA* திசையிலென்று வைத்துக் கொள்ளுவோம். (உராய்வை நாம் *TP* திசையில் கொண்டுள்ளோம்.)

சமநிலைச் சமன்பாடு

1. $\dfrac{dT}{ds} + \mu k - w \sin \psi = 0$

2. $\dfrac{T}{\rho} - k - w \cos \psi = 0$

k ஐ நீக்க வேண்டும்; அதற்கு $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = 0$ என்பதைப் பயன்படுத்தவும்.

(1)-லிருந்து $\dfrac{dT}{d\psi}\dfrac{d\psi}{ds} = w \sin \psi - \mu k$

$$\frac{dT}{d\psi} = \rho w \sin \psi - \rho \mu k$$

(2)-லிருந்து $\mu T = \rho \mu w \cos \psi + \rho \mu k$

$$\therefore \frac{dT}{d\psi} + \mu T = \rho w (\sin \psi + \mu \cos \psi)$$

இந்த வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$T e^{\mu\psi} = C + w \rho \int e^{\mu\psi} (\sin \psi + \mu \cos \psi)\, d\psi.$$

குறிப்பு 1:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

என்பதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு 2 :

பல வளைவரைகளுக்கு (s, ψ) சமன்பாடு (intrinsic equation) காண இயலும். அப்போது $\rho = \frac{ds}{d\psi}$

$\therefore$ ρ -வை ψ-ன் சார்பலனாகக்காண முடியும்.

வளைவரை : s, ψ சமன்பாடு

எடுத்துக்காட்டு :

நிலைக்குத்தான உராய்வுள்ள வட்டத்தின் மேல் பாகத்தில் கால் வட்டத்திற்கு ஒரு சீரான அடர்த்தியுள்ள சங்கிலியம் எல்லைச் சம நிலையில் உள்ளது. அதன் கீழ் நுனிக்கு வரையப்படும் ஆரம் நிலைக்கோட்டுடன் α கோணச்சாய்வில் இருந்தால்

$$\tan(\alpha - 2\lambda) = e^{-\frac{\pi}{2}\mu} \quad (\mu = \tan\lambda \text{ குணகம்})$$

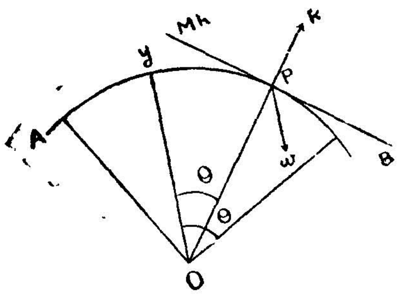
என நிறுவுக.

தீர்வு

படவிளக்கம்

AB என்பது சங்கிலியம். O, வட்ட மையம். OY நிலைக் குத்துக் கோடு.

$\angle YOB = \alpha$ ஆகுக. $\angle AOB = 90°$. P சங்கிலியத்தின் ஏதேனும் புள்ளி. $\angle YOP = \theta$.



படம் 53

புறவிசைகள் :

(i) தாங்கு விசை k (OK திசையில்) (ii) எல்லை உராய்வு விசை μk (படம் காண்க) (iii) அலகு நீளச் சங்கிலிய நிறை w நேர் கீழ்.

சம நிலைச் சமன்பாடு

$$\frac{dT}{ds} + F_1 = 0 \quad \frac{T}{\rho} + F_2 = 0$$ (சூத்திரத்தில் கண்டுள்ளபடி)

F_1 = தொடு கோட்டுத்திசை விசைகள்

$$= -\mu k + w \sin\theta$$

F_2 = உள் செங்கோட்டுத்திசை விசைகள்

$$= w \cos\theta - k.$$

$$\therefore \frac{dT}{ds} - \mu k + w \sin\theta = 0$$

$$\frac{T}{\rho} = k + w\cos\theta = 0 \qquad P = a \quad ds = a d\theta$$

$$\therefore \frac{dT}{d\theta} - \mu k a = - a w \sin\theta$$

$$T - ak = - a w \cos\theta$$

$$\therefore \frac{dT}{d\theta} - \mu T = a w (\mu \cos\theta - \sin\theta)$$

$$\therefore T e^{-\mu\theta} = aw \int e^{-\mu\theta} (\mu\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta$$

$$= aw \frac{e^{-\mu\theta}}{1+\mu^2} \mu [-\mu\cos\theta + \sin\theta)$$

$$- aw \frac{e^{-\mu\theta}}{1+\mu^2} [-\mu\sin\theta - \cos\theta) + C$$

$$= C - \frac{a w e^{-\mu\theta}}{1+\mu^2} \{(\mu^2-1)\cos\theta - 2\mu\sin\theta\}$$

$\therefore$ $\mu = \tan\lambda$ எனப்பிரதியிட

$$T = C e^{\mu\theta} + aw\cos(\theta - 2\lambda)$$

இரண்டு நுனிகளிலும் $T = 0$. அதாவது

$\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ A.ல்; $\theta = \alpha$ B-ல் இரண்டு இடங்களிலும்

$T = 0.$

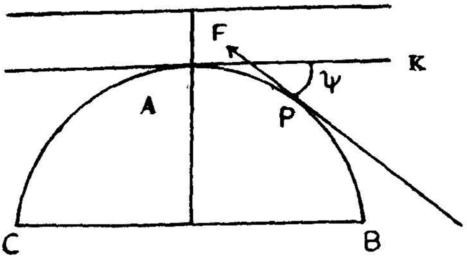
$$\therefore \quad O = Ce^{-\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} + aw \sin(\alpha - 2\lambda)$$

$$O = Ce^{\mu\alpha} + aw \cos(\alpha - 2\lambda)$$

$$\therefore \quad \tan(\alpha - 2\lambda) = e^{-\frac{\pi}{2}\mu}.$$

எடுத்துக்காட்டு

ஓர் உராய்வுள்ள உருள் வளை அதன் உச்சி மேலே இருக்கு மாறு நிலைத்தளத்தில் உள்ளது. அதன் மேல் உச்சியில் ஒரு நுனியும், முனையில் (cusp) மற்றொரு நுனியும் இருக்குமாறு ஒரு சங்கிலி எல்லைச் சமநிலையில் உள்ளது என்றால், $(1+\mu^2)\, e^{\mu\frac{\pi}{2}} = 3$ என நிறுவுக. (μ என்பது உராய்வுக் குணகம்).



படம் 54.

பட விளக்கம்

CAB உருள் வளை ; *A* அதன் உச்சி ; *B* முனை; *AB* சங்கிலி. *x* அச்சுடன் தொடுகோட்டுச் சாய்வு ψ.

$\therefore$ உருள் வளையின் (s, ψ) சமன்பாடு $s = 4a \sin\psi$.

புற விசைகள்

(i) வெளிச் செங்கோட்டுத்திசையில் தாங்கு விசை k
(ii) ψ அதிகரிக்கும் தொடுகோட்டுத் திசையில் $-F = -\mu k$
(iii) அலகு நீளத்தின் நிறை w நேர் கீழாக.

$$\therefore \frac{dT}{ds} - \mu k + w \sin\psi = 0 \qquad \ldots\ldots(1)$$

$$\frac{T}{\rho} - k + w\cos\psi = 0 \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$\rho = \frac{ds}{a\psi} = \frac{d}{d\psi}(4a\sin\psi) = 4a\cos\psi$$

(1)-லிருந்து $\frac{dT}{d\psi} - \rho\mu k + \rho w \sin\psi = 0$

(2)-லிருந்து $T - \rho k + \rho w \cos\psi = 0$

$$\therefore \frac{dT}{d\psi} - \mu T = \rho w(\mu\cos\psi - \sin\psi)$$

$$= 4aw\cos\psi(\mu\cos\psi - \sin\psi).$$

$$\therefore Te^{-\mu\psi} = 4aw\int e^{-\mu\psi}(\mu\cos\psi - \sin\psi)\cos\psi\, d\psi.$$

$$= 2aw\int e^{-\mu\psi}(\mu 2\cos^2\psi - 2\sin\psi\cos\psi)\, d\psi.$$

$$= 2aw\int e^{-\mu\psi}[\mu(1+\cos\psi) - \sin 2\psi]\, d\psi.$$

$$= 2aw\left[-e^{-u\psi} + \frac{e^{-\mu\psi}}{4+\mu^2}\right.$$

$$\{\mu(-\mu\cos 2\psi + 2\sin 2\psi) - (\mu\cos 2\psi - 2\cos 2\psi)\}$$

$$\therefore T e^{-\mu\psi} = 2awe^{-\mu\psi}$$

$$\left[-1 + \frac{(2-\mu^2)\cos 2\psi + 3\mu\sin 2\psi}{4+\mu^2}\right] + C$$

$\psi = 0$ என்றால் $T = 0$ $\quad \psi = \frac{\pi}{2}$ என்றாலும் $T = 0$

$$\therefore \quad O = 2aw\left[-1 + \frac{2-\mu^2}{4+\mu^2}\right] + C$$

$$O = 2awe^{-\mu\frac{\pi}{2}}\left[-1 - \frac{(2-\mu^2)}{4+\mu^2}\right] + C$$

$$\therefore \quad \left[-1 + \frac{2-\mu^2}{4+\mu^2}\right] + \left[1 + \frac{2-\mu^2}{4+\mu^2}\right]e^{-\mu\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$\therefore \quad 6e^{-\mu\pi/2} = 2(1+\mu^2)$$

$$\therefore \quad e^{\mu\pi/2}(1+\mu^2) = 3$$

பயிற்சி

1. ஒரு வழ வழப்பான, நிலை வட்டம் நிலைத்தளத்தில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. ஒரு சங்கிலியத்தின் ஒரு நுனி, வட்டத்தின் மிகவும் மேல்பாகத்திலும், மற்ற நுனி, கிடைக்கோட்டில் உள்ள விட்ட நுனியிலும் இருக்குமாறு கால்வட்டப் பகுதியில் உள்ளது. அது சம நிலையில் இருக்க மேல் நுனியில் ஒரு கிடைவிசை F, புகுத்தப்படுகிறது. வட்ட ஆரம் a; அலகு சங்கிலி நீளம் w என்றால் $F = wa$ என நிறுவுக.

2. மேல் கணக்கில், வட்டம் உராய்வுடையதாய் இருந்து, $F = 0$ ஆகவும், சங்கிலியம், எல்லைச் சமநிலையிலும் இருந்தால், உராய்வுக்குணகம் $\mu\left(1 - \mu^2\right)e^{\frac{\mu\pi}{2}} = 2\mu$ எனும் சமன்பாட்டின் தீர்வு ஆகும் எனக்காண்க.

3. மேற்கணக்கில் கூறிய வழ வழப்பான விட்டத்தில் மேல் நுனிகள் இரண்டும் கிடைவட்ட நுனிகளில் இருக்குமாறு அரை வட்டப் பகுதியில் சமநிலையில் இருந்தால், மிக மேல்பாகத்தில் தாங்குவிசை $2w$ எனக்காண்க. (அலகு நீளச்சங்கிலியின் எடை w.)

4. வழவழப்பான உருள்வளை (Cycloid; $s=4a\sin\psi$) அதன் உச்சி மேலும், இரு நுனிகள் கீழ் கிடைக்கோட்டிலும் அமையுமாறு நிலைத்தளத்தில் உள்ளது. இந் நுனிகள், உருள்வளையின்

நுனிகளுடன் பொருந்துமாறு, சங்கிலியம் அதன் மேல் சம நிலையில் உள்ளது. சங்கிலியத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தாங்குவிசை உருள்வளையின் வளைவரையுடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

5. வழ வழப்பான கயிற்றுவளை (Catenary) அதன் முனை (Vertex) மேலும், அச்சு நிலைக்கோட்டிலும் இருக்குமாறு அமைந்துள்ளது. அதன்மேல் சீரான அடர்த்தியுள்ள சங்கிலியம் சம நிலையில் உள்ளது. அதன்மேல் ஒவ்வொரு புள்ளியில் உள்ள தாங்குவிசை, கயிற்றுவளையின் துணைக்கோட் (Directrix) டிலிருந்து புள்ளியின் ஆழத்தின வர்க்கத்துடன் தலைகீழ் விகிதத்தில் உள்ளதென நிறுவுக.

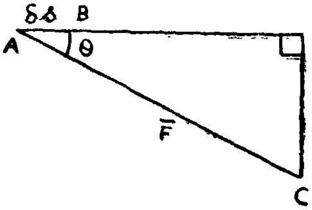
3. கற்பித வேலைத் தத்துவம்

(PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK)

விசையும் வேலையும்

$\bar{F}$ எனும் விசை $\bar{r}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய இடத்தில் உள்ள துகளை $\bar{r} + \delta\bar{r}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய இடத்திற்கு இடம் பெயரச் செய்தால், அது 'வேலை' செய்கிறதெனவும் அது செய்த வேலை $\delta w = \bar{F}\cdot\delta\bar{r}$ எனவும் கூறப்படும். ஆகவே, 'வேலை' என்பது 'எண் கணியம்' (Scalar quantity) ஆகும்.

A-லிருந்து, B-க்குத் துகள் பெயரட்டும். $AB = \delta s$. AC திசையில் $\bar{F}$ செயல்படுகிறது. $|\bar{F}| = F$ என்றால் $\bar{F}\cdot\delta\bar{r} = F$ Cos $\theta\,\delta s$ (இங்கு $\angle CAB = \theta$ ஆகும்.)



படம் 55.

துகளின்மேல் P, Q, R எனும் விசைகள் செயல்பட்டு A-லிருந்து B-க்கு இடம் பெயர்ந்தால், மொத்த வேலை $(\bar{P} + \bar{Q} + \bar{R})\cdot\delta\bar{r}$. அல்லது $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ எனும் விசைகளின் தொகுவிசை செய்யும் வேலையாகும். δs Cos θ என்பது இடப்பெயர்ச்சியின், $\bar{F}$ திசையில் உள்ள பிரிவு (Component) ஆகும்.

இடப்பெயர்ச்சி, சிறு இடப்பெயர்ச்சிகளின் வெக்டர் கூடுதலானால் விசை செய்யும் வேலை, அது ஒவ்வோர் இடப் பெயர்ச்சிக்குச் செய்யும் வேலைகளின் கூடுதலாகும்.

வேலை செய்யா விசைகள்

(i) வழவழப்பான தலத்தில் ஒரு துகள் அமையட்டும். தலத்தின் மேல் இருக்கவேண்டும் எனும் நியதியுள்ளதால், துகளின்

இடப்பெயர்ச்சி தலத்திலேயே அமைய வேண்டும். ஆனால், தலத்தின் தாங்கு விசை, துகள் உள்ள இடத்தில் தலத்திற்குக் குத்தாகும். அதாவது $F \cdot \delta r$ என்பதில் $F \perp \delta r$ ஆகிறது. $\therefore \quad F \cdot \delta \bar{r} = 0$. $\therefore$ வழவழப்பான தலத்தின் தாங்கு விசை துகள் சற்றே இடம்பெயரும்போது செய்யும் வேலை பூச்சியம் ஆகும்.

(ii) மேலே தலம் நிலையாக இருக்க, துகள் நகர்வதைக் கூறினோம். இரண்டு பொருள்களின் புறத்தலங்கள் வழவழப்பாக இருந்து ஒன்றின்மேல் மற்றது நகரும்போது ஒன்றன் தாங்கு விசை மற்றதன் தாங்கு விசைக்குத் திசையில் எதிரும், அளவில் சமமாகவும் இருக்கும். ஆதலால் அவை இரண்டும் தொடு புள்ளியில் இரண்டினது வேலையும் சேர்ந்து நுண்ணிய பெயர்ச்சிக்குப் பூச்சியமாகும்.

(iii) உருள்தொடுகை (Rolling Contact)

முதலில் ஒரு வட்டம், சமதளத்தில் சறுக்காமல் உருள்வதைக் கொள்வோம். அப்போது அதன்மேல் உள்ள புள்ளிகள் $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ எனும் உருள் வளையில் நகரும். ஆகவே வட்டம் $\delta\theta$ சுற்ற, வட்ட மையம் தளத்திற்கு இணையாக δx தூரம் நகர்ந்தால் $\delta x = a\,\delta\theta$ (a வட்ட ஆரம்). ஆனால், தளத்துடன் தொடும் புள்ளி, தளத்திசையில் நகரும் தூரம்

$$a(\delta\theta - \sin\delta\theta); \simeq a\left[\frac{(\delta\theta)^3}{\angle 3} \cdots\right]$$ தளத்திற்குக் குத்தாக

$$a(1 - \cos\theta) \simeq a\,\frac{(\delta\theta)^2}{2} \cdots$$ ஆகவே இரண்டும் ஒரு படிக்குமேல்

உள்ள நுண் அளவுகள். இவை கணக்கில் வாரா. ஆகவே, உருள் உராய்வு விசையும் (Rolling friction), தாங்கு விசையும் (Reaction) தரும் வேலைகள் பூச்சியமாகும் சமதளத்தில் வட்டம் உருள்வதைக் கூறினோம். வளைதலப் பரப்புள்ள பொருள் மற்றொன்றின் மேல், (நிலையாகவுள்ளதோ, அல்லது இயங்குவதோ ஆயினும்) உருளும்போது, தொடும் புள்ளியில் உருள் உராய்வு விசை செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

(iv) விறைபொருள் பிணைப்புள்ள இரண்டு துகள்கள் A, B, ஐக் கொள்வோம். AB எனும் தூரம் மாறாதாகையால் A ஐச் சார்ந்த B-ன் இடப்பெயர்ச்சி AB-க்குக் குத்தாகும். அவை யிடையே உள்ள உள்ளுறு விசைகள் AB திசையிலோ (அல்லது) எதிர்த் திசையிலோ அமையும். இடப்பெயர்ச்சி குத்தாவதாய்

உள்ளுறு விசைகள் செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும். விறைப் பிணைப்புள்ள இரு துகள்கள் ஒன்றன்மேல் மற்றது செயல்படும். உள்ளுறு விசைகளின் வேலைக் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

(v) இரு துகள்கள், இழுபடா நூலினாலோ, அல்லது கோலினாலோ பிணைக்கப்பட்டால், அந் நூலில் (அல்லது கோலில்) உள்ள இழுவிசைகள் செய்யும் வேலையும் மேற்கூறியது போன்று பூச்சியமாகும்.

பிணைப்புகள் அல்லது கட்டுப்பாடுகள் (Constraints)

ஒரு துகளின் இயக்கமோ, அல்லது துகள் தொகுதிகள் கொண்ட பொருள்களின் இயக்கமோ, நடைமுறையில் கட்டில்லாது இருக்க முடியாது. பல்வேறு கட்டுப்பாடு களுக்குட்பட்டே இயங்கவேண்டி வரும்.

விறைபொருள் பிணைப்புள்ள துகள்கள் இரண்டு துகள் களிடையே தூரம் மாருதிருக்க வேண்டும எனும் கட்டுப்பாட்டுக்கு உட்பட்டது. வழவழப்பான கம்பியில் கோக்கப்பட்டுள்ள மணியைத் துகளாகக் கொண்டால், அது அந்தக் கம்பியை விட்டு நீங்க முடியாது.

ஒரு திண்மக் கோளத்தின் மீதுள்ள துகள், கோள மையத் திலிருந்து அதன் தூரம் கோள ஆரமுடையதாக இருக்கும்படி இயங்க வேண்டும். இங்கு இத்தகைய பிணைப்புகளால், அல்லது கட்டுப்பாடுகளால் ஏற்படும் உள்ளுறு விசைகள், வேலை செய்யா விசைகளை யுடையனவாகவுள்ள தொகுதியைப் பற்றி மட்டும் கவனிப்போம்.

கற்பித இடப்பெயர்ச்சி (Virtual displacements)

விறைபொருள் தொகுதியோ, துகள் தொகுதியோ, ஒரு சில கட்டுப்பாடுகளுக்கு (அல்லது பிணைப்புகளுக்கு) உட்பட்டு, புற விசைகள் செயல்படச் சமநிலையிலிருக்கட்டும். சில துகள் களுக்குக் ‘கற்பிதமான’ நுண்ணிய இடப்பெயர்ச்சியை அளிப் போம் இவை கட்டுப்பாடுகளுக்குப் பொருந்தியனவாக இருக்க வேண்டும். அதாவது துகள் ஒரு தளத்தில் இருந்தால், கற்பித இடப்பெயர்ச்சி தளத்தை விட்டு நீங்கச் செய்வதாகவோ, அல்லது பரப்பை ஊடுருவிச் செய்வதாகவோ, பொருத்தமில்லாத இடப் பெயர்ச்சியாக இருக்கக் கூடாது.

i th துகள்களின் மேல் செயல்படும் விசை $\bar{F}_i$ ஆகுக. இதை $\bar{F}_i^{(e)} + \bar{f}_i$ எனக் கூறலாம்.

முதல் விசை புற விசை. இரண்டாவது கட்டுப்பாடுகளால் ஏற்படும் உள்ளூறு விசை. இடப்பெயர்ச்சி δr_i என்றால், மொத்த வேலை $\delta w = \Sigma \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i$

$$\therefore \quad \delta w = \Sigma \bar{F}_i(^a) \cdot \delta r_i + \Sigma f_i \cdot \delta \bar{r}_i$$

ஆனால் கட்டுப்பாடுகளால் ஏற்படும் (கற்பித) வேலை பூச்சியமாகும் தொகுதியையே (system) கவனிப்போம்.

$$\therefore \quad \bar{r}_i \cdot \delta \bar{f}_j = 0$$

$\therefore \quad \delta w = \Sigma \bar{F}(^a) \cdot \delta \bar{r}_i = 0$ என்றால் தொகுதி சம நிலையில் இருக்கும். இதுவே 'கற்பித வேலைத் தத்துவம்' எனப்படும். கட்டுப்பாட்டுக்குப் பொருந்திய, ஆனால் மற்றபடி எந்தத் திசையிலும் இருக்குமாதலால் $\bar{F}_i(^a) = 0$ அதாவது துகள்கள் சம நிலையில் இருக்கும். அதாவது தொகுதி சமநிலையில் இருக்கும். மறுதலையாகச் சமநிலையில் இருந்தால் $\bar{F}_i(^a) = 0$ ஆனதால் $\delta w = \Sigma \bar{F}_i(^a) \delta r_i = 0$ ஆகும் கற்பிதவேலை பூச்சியமாகும். இதைக் கற்பித வேலைத்தத்துவம் (Principle of Virtual work) என்பர். மேற்கூறிய சமன்பாட்டில் புற விசைகள் மட்டும் வருவதைக் காண்க.

[குறிப்பு : $\delta \bar{r}_i$ என்பது 'கற்பித' இடப்பெயர்ச்சி எனக் கூறினோம். இதன் விளைவாக விசை செய்யும் வேலையைக் கற்பித வேலை' எனவும் கூறினோம். ஆகவே, உண்மையாக நேரிடும் இடப்பெயர்ச்சி அல்ல. அத்தகைய இடப்பெயர்ச்சி காலத்தின் சார்பலனாகும்.

$y = f(x)$ என்பது சார்பலன் என்றும், x-ல் δx எனும் கூடுதல் ஏற்பட்டால், y-ல் δy எனும் மாறுதல் ஏற்படும் என்றும் கூறுவதை ஒத்ததாகும்.]

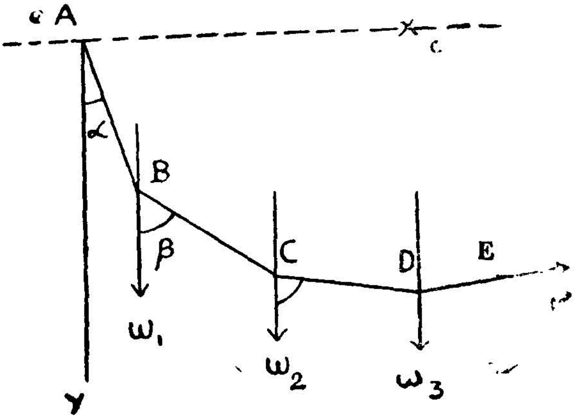
கணக்கு 1 :

$ABCDE$ என்ற நூலில் B, C, D எனும் இடங்களில் w_1, w_2, w_3 எடையுள்ள துகள்கள் தொங்கவிடப்படுகின்றன. நூலின் A என்ற நுனி ஓர் இடத்தில் கட்டப்படுகிறது E என்ற நுனியை P எனும் விசையால் கிடைத்திசையில் இழுக்கப்படுகிறது. AB, BC, CD, என்ற நூலின் பாகங்கள் நிலைக்கோட்டுடன் α, β, γ எனும் கோணச்சாய்வில் இருந்தால், $\cot \alpha$, $\cot \beta$, $\cot \gamma$ என்பவை AP-ல் உள்ளன எனக் காண்க.

படத்தில் துகள் தொங்கவிடப்பட்டுள்ள நூல் காட்டப்பட்டுள்ளது. துகள் தொகுதியின் பொதுமைக்கூறுகள் (Generalised Coordinates) α, β, γ ஆகும்.

$AB = a, BC = b, CD = c$ ஆகுக.

Ax, Ay எனும் கிடை நிலைக்கோடுகளை $x, y,$ அச்சுகளாகக் கொள்ளவும்.



படம் 56.

துகள்களின் நிறை w_1, w_2, w_3 ஆகுக.

	x கூறு	y கூறு
w_1-ன்	$a \sin \alpha$	$a \cos \alpha$
w_2-ன்	$(a \sin \alpha + b \sin \beta)$	$(a \cos \alpha + b \cos \beta)$
w_3-ன்	$(a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma)$,	$(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)$.

P செய்யும் கற்பித வேலை $= \Sigma P \delta x$

P என்பது D யை δx தூரம் இடப்பெயர்ச்சியாக்க,

$P\, d\,(a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma)$

$P\,(a \cos \alpha\, \delta \alpha + b \cos \beta\, \delta\beta + c \cos \gamma\, \delta \gamma)$.

நிறைகள் w_1, w_2, w_3 செய்யும் கற்பித வேலை.

$$= w_1\, d\,(a \cos\alpha) + w_2\, d\,(a \cos\alpha + b \cos \beta) + w_3\, d\,(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma)$$

$$= -[w_1\, a \sin \alpha\, \delta \alpha + w_2\, a \sin \alpha\, \delta \alpha + w_2\, b \sin \beta\, \delta\beta + w_3\, a \sin \alpha\, \delta \alpha + w_3\, b \sin \beta\, \delta \beta + w_3\, c \sin \gamma\, \delta\gamma]$$

மொத்தக்கற்பித வேலை பூச்சியம்.

$$\therefore\ (P\ a \sin\alpha - w_1\ a\sin\alpha - w_2\ a\sin\alpha - w_3\ a\sin\alpha)\ \delta\alpha$$
$$+\ (P\ b\cos\beta - w_2\ b\sin\beta - w_3\ b\sin\beta)\,\delta\beta$$
$$+\ (P\ c\cos\gamma - w_3\ b\sin\gamma)\ \delta\gamma = 0$$

$\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ என்பவை தொடர்பிலா நுண்மாறுதல்கள்; ஆதலால், அவற்றின் குணகங்கள் ஒவ்வொன்றும் பூச்சியம்.

$\therefore P\cot\alpha = w_1 + w_2 + w_3$

$P\cot\beta = w_2 + w_3 \qquad \therefore\ (P\cos\alpha - \cos\beta) = w_1$

$P\cot\gamma = w_3 \qquad P(\cot\beta - \cot\gamma) = w_2$

$w_1 = w_2 = w_3 = w$ என்றால்

$\cot\alpha - \cot\beta = \cot\beta - \cot\gamma$

$\therefore$ $\cot\alpha, \cot\beta, \cot\gamma$ என்பவை $A\ P$-ல் உள்ளன.

[குறிப்பு: மேல் கணக்கிலிருந்து δr_i என்பது அதாவது B, C, D-ல் உள்ள துகள்களின் இடப்பெயர்ச்சிகள் ஒன்றை யொன்று சார்ந்தன எனவும், ஆனால், δq_i (இங்கு $\delta\alpha, \delta\beta\ \delta\gamma$) சார்பிலா கூறுகளின் நுண் மாற்றங்களெனவும், θ_j என்பது என்ன எனவும் காண்கிறோம். 3 பொதுமைக் கூறுகளைக் காண 3 சமன் பாடுகள் வருவதையும் பார்க்கிறோம்.]

கணக்கு 2:

ஒரே மாதிரியான இருசம நீளமுள்ள $2\,l$ நீளமுள்ள கோல்கள் AB, AC, A-ல் தட்டின்றி இயங்கும் வண்ணம் உள்ள மூட்டுடன் (Joint) உள்ளது. அதனை வழவழப்பான ஒரு வட்டத்தின் மீது வைத்தால், சமநிலையில் உள்ள போது $a\operatorname{cosec}^2\theta\cot\theta = l$ எனும் படி நிலைக் கோட்டுடன் θ சாய்வில், கோல்கள் உள்ளன எனக் காண்க. (a என்பது வட்ட ஆரம்).

AB, AC கோல்கள்.

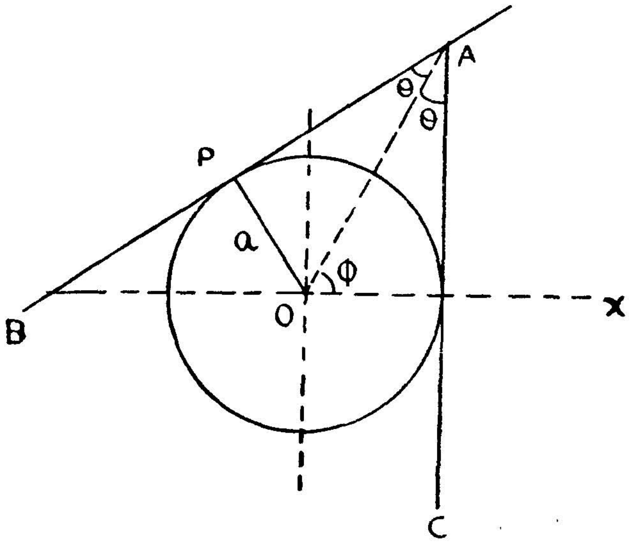
$\angle BAC = 2\theta$

O-என்பது வட்ட மையம்.

AB எனும் கோல் வட்டத்தை P-ல் தொடட்டும்.

O-வழியுள்ள கிடைக்கோடு Ox, நிலைக்கோடு Oy அச்சுகளாகுக. $\angle xOA = \phi$ ஆகுக. இவ்வாறு கோல்களின் நிலை θ, ϕ எனும் எண்களால் நிச்சயிக்கப்படுகிறது.

வழுவழுப்பான வட்டமாதலால், வட்டத்தினுல், கோல்கள் மேல் செயல்படும் தாங்கி விசைகள் வேலை செய்வதில்லை. கோல்



படம் 57.

களின் நடுப் புள்ளிகளில் செயல்படும் w, எனும் அவற்றின் நிறை மட்டும் வேலை செய்கின்றன.

AB-ன் நடுப் புள்ளி G_B-ன் y கூறு y_B ஆகுக.

AC-ன் நடுப்புள்ளி G_C-ன் y கூறு y_C ஆகுக.

அப்போது $w\,(\delta y_B + \delta y_C) = 0$ ஆகும்.

A-ன் கூறுகள் (x_A, y_A) என்ருல்

$y_A = OA \sin\phi$; ஆனுல் $OA = a \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore\ y_A = a \operatorname{cosec}\theta \sin\phi$

AB, x-அச்சுடன் உள்ள சாய்வுக் கோணம் $(\phi - \theta)$

$\therefore$ BA-ன் சமன்பாடு y கூறில் மட்டும்

$y = y_A + r \sin(\phi - \theta)$

ஆனுல் $AG_B = l$ (B ஐ நோக்கி)

$\therefore \quad y_B = y_A - l \sin(\phi - \theta)$

$y_B = a \operatorname{cosec}\theta \sin\phi - l\sin(\phi - \theta)$

இதே போன்று

$y_C = a \operatorname{cosec}\theta \sin\phi - l\sin(\phi - \theta)$

$\therefore \quad y_B + y_C = 2a \operatorname{cosec}\theta \sin\phi - 2l\sin\phi\cos\theta.$

ஆனல $\delta(y_B + y_C) = 0$

$\therefore \quad (2a \operatorname{cosec}\theta \cos\phi - 2l\cos\phi\cos\theta)\,\delta\phi$

$+ [-2a \operatorname{cosec}\theta\cos\theta\sin\phi + 2l\sin\phi\sin\theta]\,\delta\theta = 0$

$\therefore \quad (2a \operatorname{cosec}\theta - 2l\cos\theta)\cos\phi = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$

$(-2a \operatorname{cosec}\theta\cot\theta + 2l\sin\theta)\sin\phi = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$

(1)-லிருந்து $\phi = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ (2)-லிருந்து $2l\sin\theta = 2a\operatorname{cosec}\theta\cot\theta$

$\therefore \quad \underline{l = a\operatorname{cosec}^2\theta\cot\theta}$

[குறிப்பு 1: $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ ஆக. இருக்கவேண்டும் (Symmetric function) என முன்னரே தீர்மானமாகக் கூறலாம் என்றாலும், $\phi \neq \dfrac{\pi}{2}$ என்ற சமநிலையில்லை என உறுதி கூறமுடியாது. ஆனல், இப்போது $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ எனும் படியுள்ள சமநிலை மட்டுமே உள்ளது எனக் கண்டோம்.]

குறிப்பு 2: $\phi \neq 0$ ஆனல் $2a \operatorname{cosec}\theta = 2l\cos\theta$ என இருக்கலாமல்லவா?

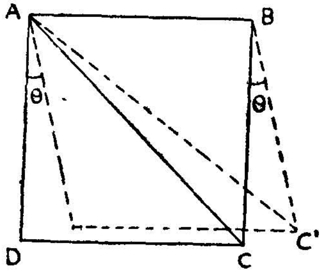
அதாவது $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{a}{l}$

அப்போது (2)ஆவது சமன்பாட்டிலிருந்து $\phi = 0$ எனவரும். அதாவது A, x அச்சில் இருக்கும் என வருகிறது.

அப்போது A எனும் கோல் வட்டத்தைத் தொடாது கீழே தொங்கும். சமநிலை இருக்காது. ஆகவே, மேற்கூறிய ஒரே சமநிலையுள்ளது.]

கணக்கு 3:

AB, BC, CD, DA என்ற நான்கு சீரான கோல்களாலான சட்டம் $ABCD$-ன் ஒவ்வொரு கோலின் நிறையும் w ஆகும். அவை சம நீளமுள்ளவை. AB கிடைத்தளத்தில் வைக்கப் பட்டுள்ளது. A, C ஐ இழுபடா நூலால் இணைக்கப்பட்டு, சட்டம் நிலைத்தளத்தில் உள்ளது. பக்கங்களின் நீளம் $2a$ ஆகவும், நூலின் நீளம் $2\sqrt{2}a$ எனவுமானால், நூலில் உள்ள இழுவிசை என்ன ?



படம் 58.

நூல் சற்றே இழுபடக் கூடிய மீள் இயல்புள்ளதெனக் கொள்வோம்.

AD எனும் பக்கத்தின் சாய்வு நிலைக் கோட்டிற்கு θ ஆகுக.

வேலை செய்யும் விசைகள் AD, BC, DC எனும் பக்கங்களின் நிறைகளும், நூலின் இழுவிசையாகும்.

AD, BC-ன் மையப்புள்ளிகளின் AB-க்குக் கீழ் உள்ள தூரம் (y கூறு எனலாம்) $= a\cos\theta$

DC-ன் கீழ் தூரம் $= 2a\cos\theta$

$2w\ \delta(a\cos\theta) + w\ \delta(2a\cos\theta)$ என்பது நிறைகள் செய்யும் கற்பித வேலை.

$$AC'^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\,BC \cos \overline{90 + \theta}$$

$$l^2 = 8a^2 + 8a^2 \sin \theta$$

$$l = 2\sqrt{2a}\,(1 + \sin \theta)$$

∴ இழு விசை செய்யும் வேலை $- T\delta l = - T\delta\, 2\sqrt{2a}$ $(1 + \sin \theta)$. மொத்த வேலை = 0. சமநிலையில் $\theta = 0$.

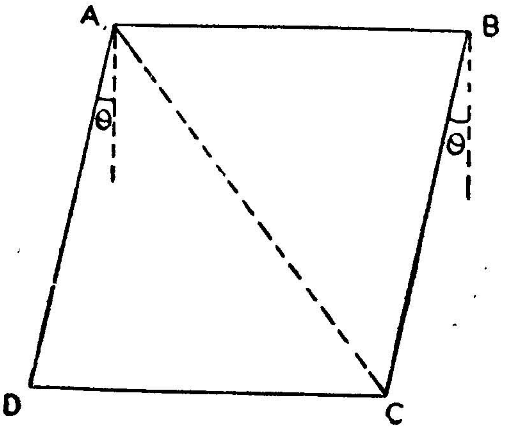
∴ $T = 0$

[குறிப்பு : நூலில்லாவிடினும் இந்தச் சமநிலையில் சட்டம் இருக்கும் என்பது கவனிக்கத்தக்கது.]

கணக்கு 4 :

மேற் சொன்ன கணக்கில், நூலின் நீளமும் சட்டங்களின் நீளத்திற்குச் சமமாக $2a$ என இருந்தால் நூலில் உள்ள இழுவிசை என்ன?

AD, BC எனும் சட்டங்கள் நிலைக்கோட்டுடன் $\theta°$ சாய்வில் இருக்கட்டும். கீழ் நோக்கியுள்ள நிலைக்கோட்டை y அச்சாகக் கொள்ள, சட்டங்களின் மையப்புள்ளிகளின் y கூறுகள்



படம் 59.

AD-க்கு $a \cos \theta$; BC-க்கு $a \cos \theta$, DC-க்கு $2a \cos \theta$

∴ அவற்றின் நிறைகள் செய்யும் கற்பித வேலை.

$= W\,\delta\,(a\cos\theta) + W\,\delta\,(a\cos\theta) + W\,\delta\,(2a\cos\theta)$

$= -\,4W\,a\sin\theta\,\delta\,\theta$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB\cdot BC\;\cos\angle ABC$

$= 4a^2 + 4a^2 - 8a^2\cos\overline{90-\theta}$

$\therefore\;\; AC = 2\sqrt{2}a\,\sqrt{(1-\sin\theta)} = l$

$\therefore$ இழுவிசை செய்யும் கற்பித வேலை $-\,T\delta l$

$$= +\,\frac{T\sqrt{2}a\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\,\delta\theta$$

$\therefore$ மொத்தக் கற்பித வேலை $= 0$; சமநிலையில் $\theta = 30^\circ$ ($ABC = 60^\circ$ ஆனதால்)

$$\therefore\;\; -\,4W\,a\sin\theta + \frac{T\sqrt{2}a\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}} = 0$$

$\theta = 30^\circ$ என்றால் $\dfrac{T\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{4w}{2}\;\therefore\;\; T = \dfrac{2w}{\sqrt{3}}$

[இங்கு இழுவிசையிருப்பதைக் காணவும்.]

கணக்கு 5

$ABCD$ என்பது ஒரு நாற்கரச் சட்டம்.

இதில் $AB = AD$ இவற்றின் நிறை ஒவ்வொன்றும் w.

$BC = BD$. நிறை w'. A, Cஐ ஒரு நூலால் பிணைக்கப் பட்டுள்ளது. $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAD = 2\theta$ எனும்படியும் உள்ளது. சட்டம் A-லிருந்து தொங்கவிடப்பட்டால் நூலில் உள்ள இழு விசை $(w + w')\sin^2\theta + w'$ எனக் காண்க.

$AB = AD = 2a$

$BC = BD = 2b$

$\angle BAD = 2\theta$; $\angle BCD = 2\theta$ ஆகுக.

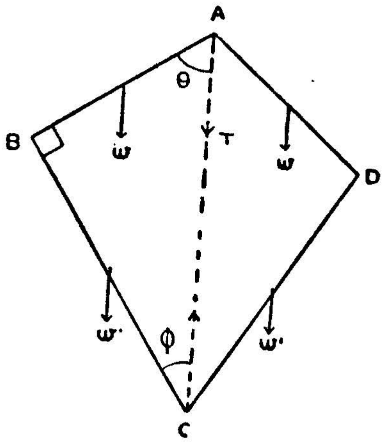
AB-ன் நடுப்புள்ளியின்,

A-க்குக் கீழே தூரம் $= a \cos\theta$,

AD ... ... $= a \cos\theta$

BC ... ... $= (a + b \cos\theta)$

DC ... ... $= (a + b \cos\theta)$



படம் 60.

AC-ன் நீளம் $= 2\,(a \cos\theta + b \cos\theta)$

∴ கற்பித வேலைத் தத்துவப்படி.

$2wd\,(a\cos\theta) + 2w'\,d\,(2\,a\cos\theta + 2\,b\cos\phi) - T2d\,(a\cos\theta + b\cos\phi) = 0.$

$T\,(a\sin\theta\,d\theta + b\sin\phi\,d\phi) = wa\sin\theta\,d\theta + w'\,(2\,a\sin\theta\,d\theta + 2b\sin\phi\,d\phi).$

ஆனல் $a\sin\theta = b\sin\phi$

$\therefore\ a\cos\theta\,d\theta = b\cos\phi\,d\theta$

இவற்ருல் வகுக்க

$\therefore\ T\,(\tan\theta = \tan\phi) = w\tan\theta + w'\,(2\tan\theta + \tan\phi)$ சம நிலையில் $\cot\theta = \tan\phi$.

$\therefore\ T\,(\tan\theta + \cot\theta) = w\tan\theta + w'\,(2\tan\theta + \cot\theta)$

$\therefore\ T = (w + w')\sin^2\theta + w'$

4. உத்திரங்களின் உள்ளுறு அமுக்கம்

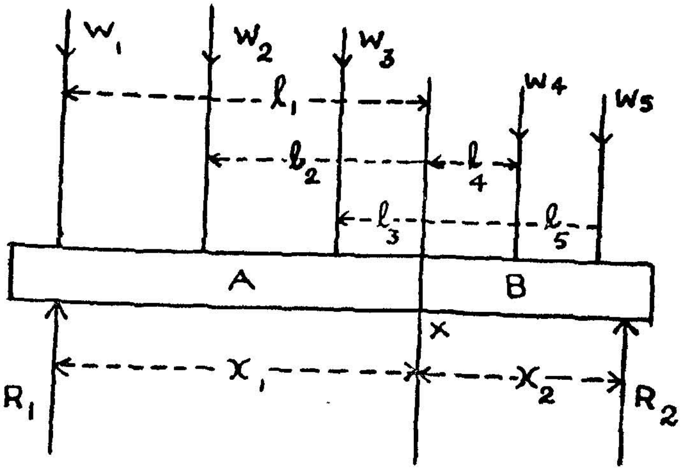
(STRESSES IN BEAMS)

4-1. உத்திரம்

கிடைத்தளத்தில் அமையும் அதிக கனமில்லாத நீண்ட சீரான கோல் அல்லது பலகைகளை உத்திரம் என்போம். அதன் மேல் குத்துவிசைகள் செயல்படும்போது ஏற்படும் விளைவுகளை ஆராய்வோம்.

4-2. திரிபு (Strain)

விசைகள் செயல்படும்போது உத்திரத்தில், நீளத்திலும், நேர்கோடமைவதிலும் மாற்றம் அல்லது திரிபு ஏற்படும். இவற்



படம் 61.

றிற்கும் புறவிசைகளுக்கும் உள்ள தொடர்பைக்காண வேண்டும். அத்துடன் உள்ளுறு விசைகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களையும் காண

வேண்டும். படத்தில் ஒரு உத்திரத்தைத் தாங்கு விசைகள் R_1, R_2 மேல் நோக்கிச் செயல்படுகின்றன. W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 எனும் விசைகள் கீழ்நோக்கிச் செயல்படுகின்றன.

உத்திரத்தின் நீளத்திற்குக்குத்தாக X எனும் இடத்தில் உள்ள தளம், அதை A, B எனும் இரு துண்டுகளாகப் பிரிக்கின்றன. A எனும் துண்டைச் சமநிலையில் இருக்கச்செய்யும் விசைகள் முறையே (படம் காண்க), w_1 w_2 w_3 R_1 எனும் விசைகளும் B எனும் துண்டால் A-ல் ஏற்படும் அமுக்கவிசை (Stress)-யும் ஆகும். [A எனும் துண்டை எடையற்றதாகக் கொள்ளலாம். எடையுள்ளதாயின் அதை w-க்களில் ஒன்றாகக் கருதலாம் ஆகவே, இந்த ஆராய்ச்சியில் எடையைத் தனியாகக் கூறவேண்டியதில்லை.]

உத்தரம் கிடைத்தளத்தில் அமைவதாலும் விசைகள் யாவும் குத்தாக நிலத் தளத்தில் அமைவதாலும், B-யினால் ஏற்படும் அமுக்கத்திற்குக் கிடைப்பிரிவு இல்லை. முற்றிலும் நிலைப்பிரிவே.

∴ இந்த அமுக்க நிலைப் பிரிவின் அளவு

$$= w_1 + w_2 + w_3 - R_1$$

திசை, நேர்மேலாக இருக்கவேண்டும்.

[ஏனெனில், புறவிசைகள் $w_1 + w_2 + w_3 - R_1$ நேர் கீழாதலால்].

ஆனால், உத்திரம் முழுவதையும் கொண்டால்

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = R_1 + R_2$$

$$\therefore \quad w_1 + w_2 + w_3 - R_1 = R_2 - (w_4 + w_5)$$

∴ மேற்கூறிய அமுக்கவிசை $R_2 - (w_4 + w_5)$-க்கும் சமமாகும்.

4-3. வெட்டு விசை (Shearing force)

ஆகவே B-யினால் A-ன் மேல் ஏற்படும் அமுக்கவிசை, x-ல் உள்ள வெட்டு முகத்தின் ஏதேனும் ஒரு புறமுள்ள புறவிசைகளின் கூடுதலாகும். வெட்டு முகத்தில் செயல்படுவதால் வெட்டு விசை எனப்படும். B-யினால் A-ன் மேல் ஏற்படும் வெட்டுவிசையும், A-யினால் B-ன் மேல் ஏற்படும் வெட்டு விசையும் அளவில் சமம், திசையில் எதிர் என எளிதில் அறியலாம்.

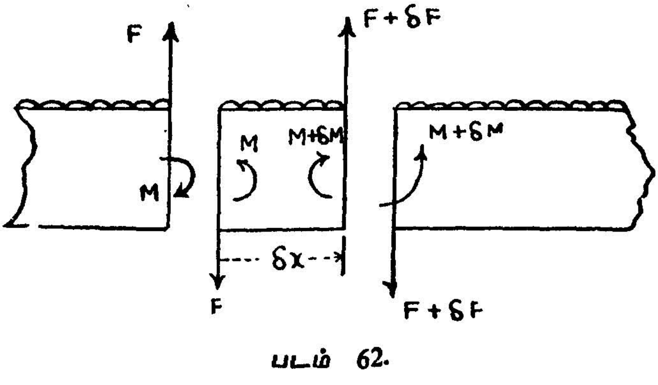
4-4. வளைவு திருப்பு திறன் (Bending Moment)

w_1, w_2, w_3, R_1 எனும் புறவிசைகளிலிருந்து வெட்டு முகத்திற்குள்ள தூரங்கள் முறையே $l_1\ l_2\ l_3\ x_1$ ஆகுக. X ஐச் சுற்றிய வலஞ் சுழியாக, இவ்விசைகளின் திருப்பு திறன்

$$M = R_1 x_1 - w_1 l_1 - w_2 l_2 - w_3 l_3$$
$$= w_4 l_4 + w_5 l_5 - R_2 x_2$$

(கூடுதல் நேரெண்ணானால் வலஞ்சுழியாக இருக்கும்). இது A எனும் துண்டின்மேல் B எனும் துண்டால் ஏற்படும் திருப்பு திறனுக்குச் சமமாகவும், எதிராகவும் இருக்கவேண்டும். M என்பது A எனும் துண்டின் மேல் செயல்படும் வளைவு திருப்பு திறன் எனப்படும். B-யினால் A-ன் பேரில் ஏற்படும் எதிர் திருப்பு திறன் தடைவு திருப்பு திறன் (Moment of Resistance) எனப்படும்.

4-5. வெட்டு விசைக்கும், வளைவு திருப்பு திறனுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பு



படம் 62.

ஓர் உத்திரத்தின் மேல், சுமை (load) பரவலாக அமையட்டும். உத்திரத்தின் δx நீளமுள்ள துண்டைக் கொள்வோம். சுமை அலகு நீளத்திற்கு w ஆகுக. δx மிகவும் நுண்ணியதாகையால், w நிலை எண்ணலலாவிடினும், δx நீளமுள்ள துண்டின் மீதுள்ள சுமை $w\delta x$ எனலாம். துண்டின் இருபுறமும் உள்ள வெட்டு விசைகள் F, $F+\delta F$ ஆகுக [படம் 62 காண்க]

வளைவு திருப்பு திறன் M, $M+\delta M$ ஆகுக. துண்டின்மேல் செயல்படும்மேல், கீழ் விசைகளைச் சமன்படுத்த,

$$F + \delta F = F + w\,\delta x$$

$$\therefore \quad \delta F = w\,\delta x$$

∴ மிகவும் நுண்ணியதாகும் போது, அதாவது

$\delta x \to 0$ ஆகும்போது $\dfrac{dF}{dx} = w$ என வருகிறது.

வெட்டு விசையின், நீளத்திற்கேற்ப நுண்மாறு வீதம், சுமை அழுத்தத்திற்குச் (Intensity of loading) சமமாகும்.

நுண்தொகை காண :

$$F - F_0 = \int_{x_0}^{x} w\,dx$$

அல்லது $$F = F_0 + \int_{x_0}^{x} w\,d_x$$

வளைவு திருப்பு திறன்களைச் சமன்படுத்த

$$M + (F + \delta F)\,\delta x - w\delta x \times \frac{\delta x}{2} \quad M + \delta M$$

[துண்டின் இடது வெட்டு முகத்தைச் சார்ந்த திருப்பு திறன்.]

∴ $M + F\delta x = M\ \delta M$ [இரண்டாவதுபடி நுண்தொகைகளைக் (Second order of small quantities) கணக்கிலெடுக்காமல்.]

$$\therefore \quad \frac{dM}{dx} = F$$

[வலப்புற வெட்டுமுகத்தைச் சார்ந்த திருப்பு திறன்களைச் சமன்படுத்தினாலும் இதுவே வரும்.]

∴ வளைவு திருப்பு திறனின் (நீளத்தைச் சார்ந்த) நுண்மாறு வீதம் வெட்டுவிசைக்குச் சமம்

குறிகள் (Signs)

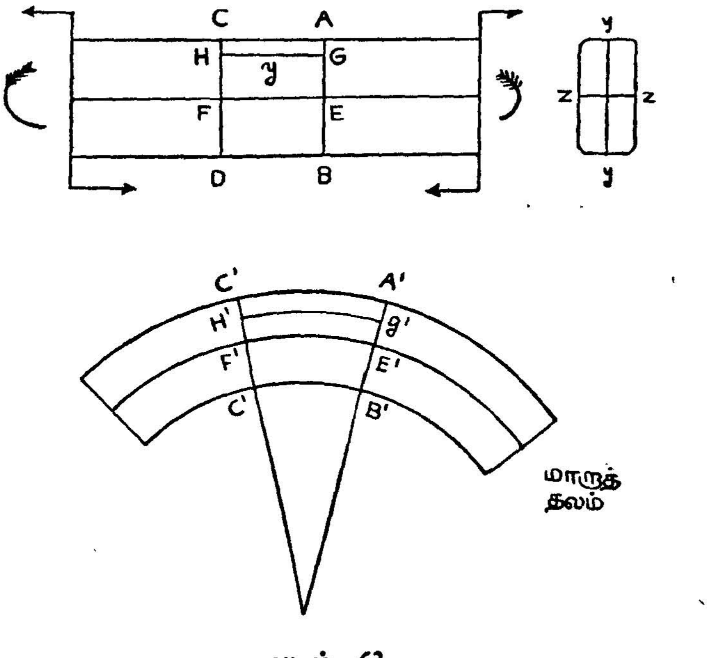
இடமிருந்து வலமாக x தூரத்தை நேரெண்ணாலும், நேர் கீழாகவுள்ள திசையில் சுமையை நேரெண்ணாலும் குறிக்க, வெட்டு முகத்திற்கு இடப்புறம் F நேர்மேலே நேரெண்ணாலும், வலப்புறம் நேர்கீழே நேரெண்ணாலும் குறிக்கப் படுகிறது ஆகவே, வெட்டு விசை (Shearing force) வெட்டு முகத்திற்கு வலப்புறமுள்ள புறவிசைகளை மேல் நோக்கி

நேரெண்ணுல் குறிக்க வரும் கூடுதலுக்குச் சமமாகும். அல்லது இடப்புறமுள்ள புறவிசைகளைக் கீழ்நோக்கி நேரெண்ணுல் குறிக்க வரும் கூடுதலுக்குச்சமம் இவ்வாறு படம் 61-ல் வெட்டுவிசையின் அளவு வலப் புற விசைகளில கூடுதல் $R - (W_4 + W_5)$ அல்லது இடப்புற விசைகளின் கூடுதல் $W_1 + W_2 + W_3 - R_1$ எனக் காட்டியுள்ளோம்.

இது போலவே வெட்டு முகத்தின் வலது பக்கமுள்ள புற விசைகளின் வலஞ்சுழித்திருப்பத்திற்கு (Clockwise Moment) வளைவு திருப்பு திறன் சமமாகும் அல்லது இடது பக்கமுள்ள, புறவிசைகளின் இடஞ்சுழித்திருப்பத்திற்குச் சமமாகும்.

4·6· மீள் வளைவுக்கொள்கை (Theory of elastic Bending)

ஒரு சீரான பொருள் அடர்த்தியுள்ள நேரான உத்திரத்தின் இரு முனைகளில் சமமானதும் எதிரெதிர்த் திசைகளிலும் உள்ள



படம் 63.

சுழலிணைகள் மட்டும் செயல்பட வேறு வெட்டு விசைகள் இல்லை யாயின், சாதாரண வளைவுத்திரிபு அடைகிறது (Suffers from

simple bending) என்கிறோம். உத்திரத்தின் வெட்டு முகம், நீளம் முழுவதும் ஒன்று போல இருக்கிறது எனக்கொள்வோம்.

சுழலிணையால் நேராகவுள்ள உத்திரத்தில் ஏற்படும் திரிபைப் படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

ஒன்றற்கொன்று நெருங்கியுள்ள AB, CD எனும் வெட்டு முகங்களைக் கொள்வோம். சுழலிணையால் ஏற்படும் திரிபு வளைவு ஆகும். வளைவுக்குப்பிறகு வெட்டுமுகங்களை A' B' C' D' எனக் குறிப்போம். முதலில் $AB \parallel CD$ என இருப்பினும், பின்னர் A' B', C' D' இணையாக இரா. அவை Oவில் சந்திக்கட்டும். $A'C' > AC'$ ஆகவும் $B'D' < BD$ ஆகவும் அமையும். AC நீள் திரிபு (Tensile) அடைகிறது. BD சுருங்குத்திரிவு (Compressive strain) அடைகிறது. இவற்றிற்கு இணையாகவும் இடையேயுள்ள FE எனும் நீளம் ஆகவே மாருதிருக்கும், FE வழி நீளத்திற்கு இணையான கிடைத்தலம் மாருத்தலம் (Neutral surface) எனப்படும். வெட்டுமுகம் இதை வெட்டும் கோடு ZZ'' எனின், அது மாருத் தலஅச்சு எனப்படும்.

$A'OC' = \theta$ (ரேடியன்) ஆகுக. OE' எனும் வளை ஆரம் (Radius of curvature) R ஆகுக. HG என்பது FE-க்கு மேல் ஒரு கோடாகுக. அது $H'G'$ என மாறட்டும் $E'G' = y$ ஆகுக.

$$\therefore \frac{H'G'}{E'F'} = \frac{(R+y)\theta}{R\theta} = \frac{R+y}{R}$$

$\therefore$ $H'G'$ எனும் தலத்தில் ஏற்படும் திரிபு

$$e = \frac{H'G' - HG}{HG} = \frac{H'G' - E'F'}{E'F'}$$

$$= \frac{(R+y)\,\theta - R\theta}{R\,\theta} = \frac{y}{R}$$

$$\therefore e = \frac{y}{R}$$

ஆகவே, மாருத்தலத்திலிருந்து y உயரத்தில் உள்ள நீளத்தில் ஏற்படும் இழுவைத் திரிபு அழுத்தம் (Tensile stress intensity) p என்ருல்

$$p = Ee = E\,\frac{y}{R}$$

[இங்கு E என்பது Young's திரிபுக்குணகம்.]

4-7. உத்திரத்தில் மாருத்தலத்தின் நிலை (Position of Neutrall axis)

உத்திரத்தின் மேல் செயல்படுவது சுழலிணை மட்டும் என்று கூறினோம். AB எனும் வெட்டு முகத்திற்கு இடப்புறம் உள்ள பாகம் ஒரு சுழலிணையால் தாக்கப்படுகிறது. அது சம நிலையில் இருப்பதால், உள்ளுறு விசைகள் AB-க்குக் குறுக்காக (அதாவது குத்தாகக் கிடைத் திசையில்) செயல்பட்டு எதிர்ச்சுழலிணைக்குச் சமமாக வேண்டும். நிலைத்திசையில் வெட்டுவிசைகள் எவையும் இல.

zz-க்கு இணையாக நுண் செவ்வக அகலம் δy ஆகுக. அதன் நுண் பரப்பு $z\,\delta y$; அதன் மேல் உள்ள மொத்த அழுத்தம் $p\,z\,\delta y$ $\quad \therefore \quad \Sigma\, p\,z\,\delta y = 0$

(சுழலிணையாவதால் மொத்த கிடைநிலை விசைகளின் கூடுதல் பூச்சியம்.)

$$\text{ஆனால் } p = \frac{E}{R} y \qquad \therefore \frac{E}{R}\sum y\,z\,\delta y = 0$$

$$\text{அல்லது } \frac{E}{R}\sum y\,\delta a = 0$$

அதாவது மாரு அச்சு, மாருத்தலத்தின் ஈர்ப்பு மையம் வழிச் செல்லும் கோடாகும்.

4-8. வளைவு திருப்பு திறனின் மதிப்பு

ஓர் உத்திரத்தின் வெட்டுமுகத்திற்குக் குத்தாகக் கிடைத் தலத்தில், அதாவது அதன் நீளத்தில் அமையும் உள்ளுறு விசைகள் சுழலிணைகளாக அமைகின்றன எனக் கண்டோம். வெட்டுமுகத்தின் அளவுகள், அதன் மேல் உள்ள அழுக்கம் (stress) இவைகளால், சுழலிணையின் மதிப்பைக் காண்போம்.

$p = \frac{E}{R} y$ எனக் கண்டோம்.

δA என்பது வெட்டுமுகத்தின் நுண்பரப்பானால், அதை

$\delta a = z\,\delta y$ எனக் கூறலாம் எனவும் கண்டோம்

ஆகவே, இதன் மேல் உள்ள விசை $p\,\delta a$. இதன் திருப்பு திறன் $p\,y\,\delta a$ (y அச்சைச் சார்ந்து.)

∴ மொத்த திருப்பு திறன் $\Sigma = p \cdot y \, \delta a$

$$\therefore \quad M = \sum \frac{F}{R} y^2 \, \delta a$$

$$M = \frac{E}{R} \sum y^2 \, \delta a$$

$$= \frac{E I}{R}$$

அல்லது $\frac{M}{I} = \frac{E}{R} \left(= \frac{p}{y} \right)$

(இங்கு I என்பது மாரு அச்சைச் சார்ந்த வெட்டுமுகத்தின் நிலைம திருப்பு திறன்)

இவ்வாறு சுழலிணை-அதாவது வளைவு திருப்பு திறனின்-மதிப்புக் காணும் சூத்திரம் வருகிறது.

4-9. சாதாரண வளைதல் கொள்கையின் சாரம்

கிடைக்கோட்டில் அமையும் ஓர் உத்திரத்தின் மேல் சுமைகள் ஏற்றப்படும்போது :

(i) ஒரு வெட்டுமுகத்தில் ஏற்படும் வெட்டுவிசை, நிலைத் திசையில், அளவில், வெட்டுமுகத்திற்கு ஒருபுறமுள்ள சுமைகளின் கூடுதலாகும். இதனை F என்போம்.

(ii) கிடைத்திசையில் ஏற்படும் உள்ளுறு விசைகளின் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

(iii) உத்திரத்தின் வளைவு திருப்புதிறன், வெட்டுமுகத்திற்கு ஒருபுறமுள்ள சுமைகளின் திருப்புதிறனின் கூடுதலாகும்.

(iv) வெட்டுமுகத்தின் தளம், சமதளமாகவே சுமைகள் செயல்படும்போதும் இருக்குமெனக் கொண்டால், அதற்குக் குத்தாக இழுவைத்திரிபு (longitudinal strain) e எனின், $e = \frac{y}{R}$

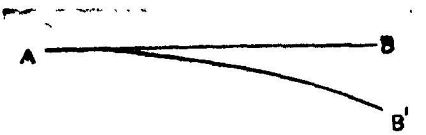
[y என்பது மாரு அச்சிலிருந்து புள்ளியின் தூரம். R என்பது வளையாரம்.]

(v) $\therefore \quad p = \dfrac{E}{R}y$

(vi) $\dfrac{p}{y} = \dfrac{E}{R} = \dfrac{M}{I}$

4-10. உத்திரத்தில் ஏற்படும் வளைவு (Deflection of Beam)

AB எனும் உத்திரம் சுமை ஏற்றப்பட AB' என வளைந்ததெனக் கொள்வோம். AB ஐ x அச்சாகக் கொள்ளலாம். இடமிருந்து வலமாக நேர்த்திசை (positive direction) மேலிருந்து கீழாக y திசையைக் கொள்வோம். வளைந்த பிறகு உத்திரத்தின் ஒரு புள்ளியின் கூறுகள் (x, y) எனலாம்.



படம் 64.

வளைவு ஆரம் $R = \dfrac{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$

ஆனால் $\dfrac{dy}{dx}$ - அதாவது உத்தரத்தின் சரிவு மிகவும் குறைவாதலால், $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ ஐக் கணக்கில் எடுக்கவேண்டாம்.

$\therefore \quad R = \dfrac{1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$

அல்லது $\dfrac{1}{R} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$

ஆனால், $M = \dfrac{E}{R} I = EI \cdot \dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

அதன் சரிவு :

$$i = \frac{dy}{dx}$$

$$= \int \frac{d^2 y}{dx^2}\, dx$$

$$= \int \frac{M}{EI}\, dx$$

வளைவு $y = \int \frac{dy}{dx}\, dx$

$$= \int i\, dx$$

$$= \int \int \frac{M}{EI}\, dx$$

ஆனால் $\frac{dM}{dx} = F, \quad \frac{dF}{dx} = w = \frac{d^2 M}{dx^2}$ எனக் கண்டுள்ளோம்

$$\therefore \quad F = \frac{d}{dx}\left(EI\ \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = EI\ \frac{d^3 y}{dx^3}$$

$$w = EI\ \frac{d^4 y}{dx^4}$$

அல்லது $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{w}{EI}$

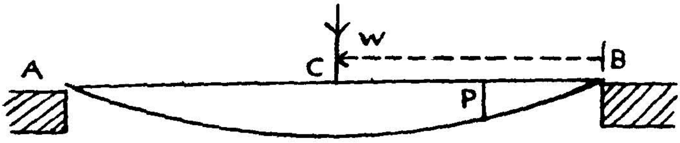
w,-அதாவது சுமைப்பரவல் — x-ன் நுண்தொகை காணக் கூடிய சார்பலனுல், F, M, i, y என்பவற்றைக் காணலாம்.

சில கணக்குகள்

கணக்கு 1

ஓர் உத்திரம் இரு நுனிகளில் சாதாரணத் தாங்கல்களின் (Simple support) மேல் வைக்கப்படுகிறது. அதன் நடுவில் ஒரு பெரிய சுமை W வைக்கப்படுகிறது. உத்திரத்தின் எடையைக்

கணக்கில் கொள்ளாவிடில், சுமையின்கீழ் உத்திரம் எவ்வளவு கீழே வளைந்துள்ளதென்பதையும், நுனிகளில், கிடைக் கோட்டுடன் என்ன சரிவில் உள்ளதென்பதையும் கணக்கிடுக.



படம் 65.

AB என்பது உத்திரம். C அதன் நடுப்புள்ளி. C ஐ ஆதியாகக் கொள்வோம். CB-ல் p ஒரு புள்ளியாகுக. $Cp = x$. ஆகுக.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}\,\frac{W}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$\therefore \quad i = \frac{dy}{dx} = \int \frac{d^2y}{dx^2}\,dx = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) + A$$

ஆனால் $x = 0$ எனுமிடத்து $i = 0$ ஆனதால் $A = 0$

$$\therefore \quad i = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad y = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{lx^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right) + B$$

ஆனால் $x = \frac{l}{2}$ எனுமிடத்து $y = 0$ ஆனதால்,

$$B = +\frac{Wl^3}{48\,EI}$$

$\therefore$ C எனும் மையப் புள்ளியில் $x = 0$ என இட

$$y_c = \frac{W\,l^3}{48\,EI}$$

இது மையப் புள்ளியின் கீழ் உத்திரத்தின் வளைவு ஆகும்.

சமன்பாடு (1)-ல் $x = \frac{l}{2}$ என இட

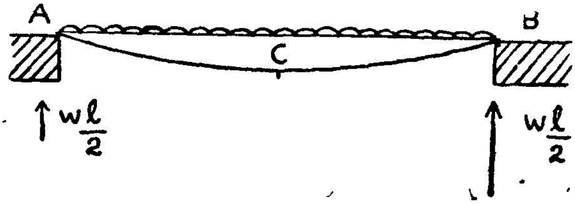
$$i_B = -\frac{W}{2EI}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{8}\right)$$

$$= -\frac{Wl^2}{16 EI}$$

அல்லது $|i_B| = \frac{Wl^2}{16 EI}$: (இது நுனியில் உத்திரத்தின் சரிவு ஆகும்.)

கணக்கு 2

மேற்கூறிய உத்திரத்தில் உத்திரத்தின் நீளம் முழுவதிலும் பரவலாகவும் சீராகவும் அலகு நீளத்திற்கு w எனச் சுமை ஏற்றினால், உத்திரத்தின் மையம் எவ்வளவு கீழே தொங்கும்? நுனிகளில் உத்திரத்தின் சரிவு என்ன?



படம் 66.

AB என்பது உத்திரம். Aஐ ஆதியாகக் கொள்ளவும். அலகு நீளத்திற்குச் சுமை w ஆகுக.

சமன்பாடு $EI \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = w$

நான்கு முறை நுண்தொகைகாண y-ன் மதிப்பு வரும், அதற்கு நான்கு நிலை எண்களின் மதிப்புக்காணவேண்டும். அதற்குள்ள நியதிகள்: [எல்லை நியதிகள் (Boundary Conditions) எனலாம்.]

$x = 0$ என்றால், $M = 0$ அதாவது $EI \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

(i) $\therefore\ x = 0$ எனும் போது $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(ii) $x = 0$ எனும் போது $y = 0$

(iii) $x = l$ எனும் போது $y = 0$

(iv) $x = \frac{l}{2}$ எனும் போது $\frac{dy}{dx} = 0$

இப்போது $EI\frac{d^4y}{dx^4} = w \qquad \therefore\ EI\frac{d^3y}{dx^3} = wx + A$

$$\therefore\ EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wx^2}{2} + Ax + B$$

ஆனல் $x = 0$ எனும் போது $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆதலால் $B = 0$

$$\therefore\ EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wx^2}{2} + Ax$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{6} + \frac{Ax^2}{2} + C$$

ஆனல் $x = \frac{l}{2}$ எனும் போது $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore\ C = -\left(\frac{wl^3}{48} + \frac{Al^2}{8}\right)$$

$$\therefore\ EIy = \frac{wx^4}{24} + \frac{Ax^3}{6} + Cx + D$$

$x = 0$ எனும் போது $y = 0 \qquad \therefore\ D = 0$

$$\therefore\ EIy = \frac{wx^4}{24} + \frac{Ax^3}{6} - \left(\frac{wl^3x}{48}\right) - \frac{Al^2x}{8}$$

$x = l$ எனும் போது $y = 0$

$$\therefore\ A\left[\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{8}\right] = \frac{wl^4}{48} - \frac{wl^4}{24} = -\frac{wl^4}{48}$$

$$\therefore\ A\,2l^3 = -wl^4$$

$$\therefore \quad A = -\, wl/2$$

$$\therefore \quad EIy = \frac{wx^4}{24} - \frac{wl\,x^3}{24} + \frac{wl^3x}{24}$$

$$= \frac{wx\,(l - x)}{24\,EI}(l^2 + lx - x^2)$$

$$\therefore \quad F = EI\,\frac{d^3y}{dx^3} = wx - w\,\frac{l}{2} \qquad \text{(வெட்டு விசை)}$$

$$M = EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wx^2}{4} - \frac{wlx}{2}$$

(வளைவுத் திருப்பு திறன்)

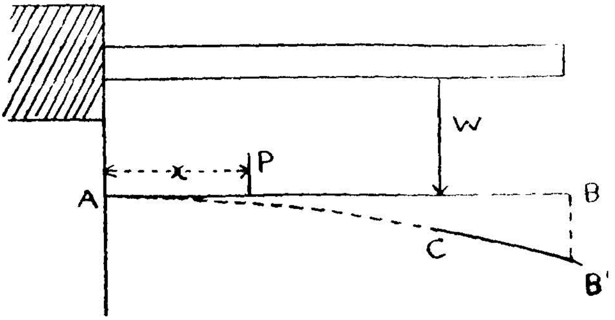
$$i = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left(\frac{wx^3}{6} - \frac{wlx^2}{4} + \frac{wl^3}{24}\right) \qquad \text{(சரிவு)}$$

$$y = \frac{1}{EI} \cdot \frac{wx\,(l - x)}{24}(l^2 + lx - x^2)$$

(கீழ்த்தாழ்வு)

கணக்கு 3

ஓர் உத்திரத்தின் ஒரு நுனி சுவரில் பொருத்தப்பட்டு, கிடை நிலையில் உள்ளது. அந்த இடத்திலிருந்து 'l_1' தூரத்தில் ஒரு சுமை w வைக்கப்படுகிறது. உத்திரத்தின் நீளம் l என்றால், மற்ற நுனி எவ்வளவு தாழ்த்திருக்கிறதென்பதைக் கணக்கிடு.



படம் 67.

AB என்பது உத்திரம். *A* என்ற நுனி சுவரில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது.

Aஐ ஆதியாகக் கொள்ளவும்.

$\therefore \quad x = 0$ எனும் இடத்து $y = 0; \ \frac{dy}{dx} = 0.$

C எனும் இடத்தில் சுமை w வைக்கப்பட்டுள்ளது.

O-விலிருந்து C-வரை உள்ள வெட்டு முகத்திற்கு வலப்புறம் w எனும் சுமையுள்ளது. O-விலிருந்து C-வரை

$$\therefore \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = w(l_1 - x)$$

[AP என்பது x எனில், P-ல் உள்ள வளைவு திருப்பு திறன் $w(l_1 - x)$]

$$\therefore \quad EI\frac{dy}{dx} = w\left[l_1x - \frac{x^2}{2}\right] + 0$$

$$EI\,y = w\left[\frac{l_1x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right] + 0$$

$\therefore \quad C$-ல் உள் சரிவு i_c என்றால்,

$$i_c = \frac{W}{EI}\left[l_1^2 - \frac{l_1^2}{2}\right] = \frac{w\,l_1^2}{2EI}$$

$$y_c = \frac{W}{EI}\left[\frac{l_1^3}{2} - \frac{l_1^3}{6}\right] = \frac{W\,l_1^3}{3EI}$$

C-லிருந்து B வரையுள்ள பாகத்தில் உள்ள வெட்டு முகத்திற்கு வலப்புறம் சுமையில்லை. ஆகவே, உத்திரம் நேராக C-ல் உள்ள சரிவில் அமையும்.

$$CB = (l - l_1)$$

$$BB' = y_c + (l - l_1)\,i_c$$

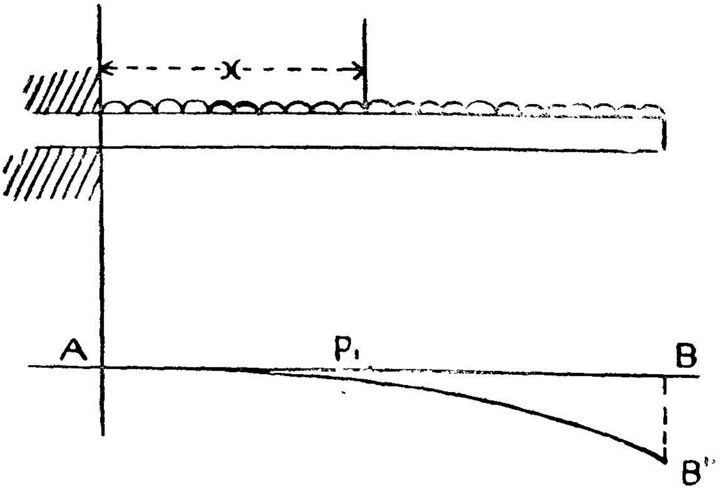
$$= \frac{w\,l_1^3}{3EI} + \frac{(l - l_1)\,l_1^2\,w}{2EI}$$

$$\therefore \quad y_B = n^2(3 - n)\,w\,l^3/6\,EI \ \| \ \left(n = \frac{l_1}{l}\right)$$

9

கணக்கு 4 :

மேற்கூறிய கணக்கில் உத்திரத்தில் நீளம் முழுவதும் பரவலாகவும் சீராகவும் அலகு நீளத்திற்கு w எனச் சுமை ஏற்றப்பட்டால், பொருத்தப்படாத முனை கிடை மட்டத்திலிருந்து எவ்வளவு தாழ்வில் இருக்கும்?



படம் 68.

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2}(l-x)^2 = \frac{w}{2}\{l^2 - 2lx + x^2\}$$

$$\therefore\ EI\frac{dy}{dx} = \frac{w}{2}\left\{l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right\} + 0$$

$$EI\,y = \frac{w}{2}\left[\frac{l^2x^2}{2} - \frac{lx^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right] + 0$$

காரணம் $x = l$ —

$$i_A = \left(\frac{dy}{dx}\right)_A = \frac{wl^3}{EI}$$

$W = wl$. என்றவிடத்து

$$y_A = \frac{Wl^3}{8EI}$$

பாகம் 3

இயக்கவியல்

1. இயக்கவியலின் அடிப்படைகள்

I. துகளின் உந்தம்

1-1. முதலில் ஒரு துகளின் இயக்கத்தை ஆராய்வோம். துகள் எனின் தணிவுடைய பொருள்; ஆனால் இடத்தை அடைக்காதது எனவும், அதன் நிலையை ஒரு புள்ளியால் குறிக்கப்படும் எனவும் கொள்வோம். அதன் நிலையை 't' நேரத்தில் 'O' எனும் ஆதிக்கு $\bar{r}$ எனும் நிலை வெக்டரால் குறித்தால், அதன் திசை வேகம் $\frac{d\bar{r}}{dt}$ அல்லது $\dot{\bar{r}}$ எனப்படும். இதனை $\bar{v}$ எனும் வெக்டராலும் குறிப்போம். அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ அல்லது $\ddot{\bar{r}}$ அல்லது $\dot{\bar{v}}$ ஆகும். துகளின் திணிவு m எனின் $m\,\bar{v}$ என்பது துகளின் உந்தம் எனப்படும். இதனை $\bar{p}$ எனும் குறியீட்டாலும் கூறுவோம். துகளின்மேல் செயல்படும் விசை $\bar{F}$ எனின், இயக்க வியலின் அடிப்படையாகிய, நியூட்டனின் இரண்டாவது விதியிலிருந்து வரும் சமன்பாடு $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ அல்லது $F = \frac{d}{dt}(m\bar{v})$

m மாருக் கணியமானால் $m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$ என்பதாகும்.

அதாவது $m\,\bar{a} = \bar{F}$ என்பதாகும்.

($\bar{a}$ என்பது முடுக்கத்தைத் தரும் வெக்டராகும்)

உந்தக் காப்புக் கொள்கை

ஒரு திசையில் அலகு வெக்டர் $\bar{\lambda}$ ஆகுக. அந்தத் திசையில் $\bar{F}\cdot\lambda = 0$ எனும்படி யாகுக. அப்போது $\bar{\lambda}\cdot\frac{d\bar{p}}{dt} = 0$

$\therefore\quad \bar{X}\cdot\bar{P} =$ நிலையெண்.

∴ ஒரு திசையில் விசையின் பிரிவு பூச்சியமென்றால், அந்தத் திசையில் துகளின் உந்தப் பிரிவு மாறாது இருக்கும். இதனை உந்தக் காப்புக் கொள்கை (Conservation of Momentum) எனக் கூறுவர்.

1-2. சுழலுந்தம் (Angular momentum)

ஒரு நேரத்தில் துகளின் உந்தம் $\bar{p}$ ஆகுக. அதன் நிலை வெக்டர் 0 எனும் ஆதிக்கு $\bar{r}$ ஆகுக. அப்போது $\bar{r} \times \bar{p}$ என்பது துகளின் 0 வைச் சார்ந்த சுழலுந்தம் எனப்படும். இதனை $\bar{h}_0$ எனக் குறிப்போம்.

$\bar{F}$ என்பது விசையானால், 0 வைச் சுற்றி அதன் திருப்பு திறன்

$$G_0 = \bar{r} \times \bar{F}$$

$$= \bar{r} \times \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

ஆனால், $\frac{d}{dt}(\bar{r} \times p) = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v})$

$$= (\bar{v} \times m\bar{v}) + \bar{r} \times \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

$$= \bar{r} \times \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{G}_0$$

$\dot{\bar{h}}_0 = G_0$ என வருகிறது.

அதாவது ஒரு புள்ளியைச் சார்ந்த துகளின் சுழலுந்த மாறுதல் வீதம் அப் புள்ளியைச் சுற்றி (அதன் மேல் செயல்படும்) விசையின் திருப்பு திறனுக்குச் சமமாகும் எனக்காண்கிறோம்.

சுழல் உந்தக்காப்புக் கொள்கை (Conservtion of Angular momentum)

$\dot{h}_0$ விசையின் திருப்புதிறன் O எனும் புள்ளியைச் சுற்றி பூச்சியம் என்றால், $\dot{\bar{h}}_0 = 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \bar{h}_0 = 0 \text{ நிலை எண்ணாகும்.}$$

துகளின், 0 வைச்சார்ந்த சுழலுந்தம் மாறாது.

1-3. விசை செய்யும் வேலை

ஒரு துகளின் மேல் செயல்படும் விசை அதனை $\bar{r}$ எனும் நிலையிலிருந்து $\bar{r}+\delta\bar{r}$ எனும் நிலைக்கு இடம் பெயரச்செய்தால், அது வேலை செய்கிற தெனவும், அது செய்யும் வேலை $dw = \bar{F}\,d\bar{r}$ எனவும் கூறப்படும். நிலை 1-லிருந்து நிலை 2-க்கு மாற்றினால்

அது செய்யும் வேலை $W = \int_1^2 \bar{F}\,d\bar{r}$ எனும் நுண்தொகையாகும்.

1-4. இயங்கு ஆற்றல்

துகளின் திணிவு நிலை எனக் கொள்வோம்.

$$\text{அப்போது} \int \bar{F}\cdot d\bar{r} = m\,\frac{d\bar{v}}{dt}\,d\bar{r}$$

$$= m\int \frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt$$

$$= m\int \frac{d\bar{v}}{dt}\cdot \bar{v}\,dt$$

$$\therefore \int_1^2 \bar{F}\cdot d\bar{r} = \frac{m}{2}\int_1 \frac{d}{dt}(v^2)\,dt \quad [\,|\bar{v}| = v.]$$

நிலை (1)-லிருந்து நிலை (2)-க்குச் செல்லும்போது செய்யப்பட்ட வேலை $W_{12} = \frac{m}{2}\,[\,v_2^2 - v_1^2\,]$

$\frac{mv^2}{2}$ எனும் எண் கணியம், துகளின் 't' நேரத்தில் உள்ள இயங்கு ஆற்றல் எனப்படும்.

இங்கு இயங்கு ஆற்றல் v_1-லிருந்து v_2 ஆகும்போது ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல் மாறுதல் விசை செய்யும் வேலைக்குச் சமம் எனக் காண்கிறோம்,

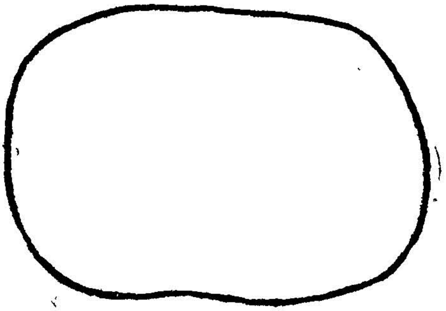
1-6. ஆற்றல் காப்பு விசை

ஒரு சுற்றுடை வரை (Closed curve)யில் நுண்தொகை $\int \bar{F}\cdot d\bar{r}$ ஐக்கொள்ள அதனை $\oint \bar{F}\cdot d\bar{r}$ எனக் குறிப்போம்.

$$\oint \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0 \text{ என்றால்,}$$

$\bar{F}$ எனும் விசை, காப்பு விசை (Corservation Force) எனப்படும்.

[உராய்வு விசை $\bar{F}$ ஆனல் $\bar{F}\cdot d\bar{r}$ எப்போதும் ஒரே குறியுடையது ஆதலால், நேரெண்ணனதால், அதன் தொகை 0 ஆகாது. ஆகவே, அது காப்புவிசையாகாது.]



படம் 69.

கணிதத்தில் வரும் ஸ்டோக்கின் தேற்றப்படி $\nabla \times \bar{F} = 0$ ஆக இருந்தால் $\bar{F}$ காப்பு விசையாகும்.

அப்போது $\bar{F} = -\nabla V$
எனக்காண முடியும்,

V எனும் திசையிலாச்சார் பலன், நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) எனப்படும்.

$\oint \bar{F}\cdot d\bar{r} = 0$ என்பதால் விசை துகளை இடம் (1)-லிருந்து இடம் (2)-க்கு நகர்த்தும்போது செய்யும் வேலை, பாதை ஏதாயினும் ஒன்ருகவே இருக்கவேண்டும்.

$\therefore \quad \bar{F}\cdot d\bar{r} = -dV$

ஆனல், T என்பது இயங்கு ஆற்றல். ஆனல் $\bar{F}\cdot d\bar{r} = dT$ ஆகும்.

$\therefore \quad dT = -dV$

அல்லது $d(T + V) = 0$

$\therefore \quad T + V =$ நிலை எண்

அல்லது $T_2 + V_2 = T_1 + V_1$ ஆகும்.

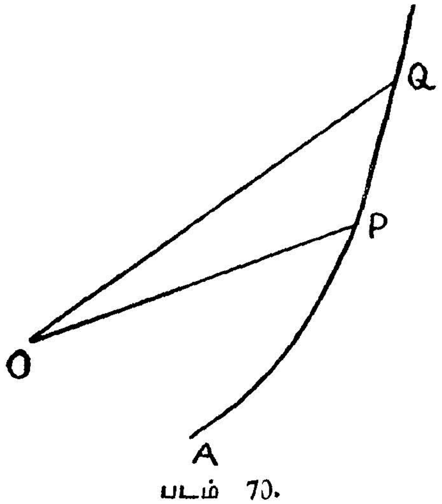
அதாவது காப்பு விசைகள், துகளின் மேல் செயல்படும்போது, இயங்கு ஆற்றல், நிலை ஆற்றல் இவற்றின் கூடுதல் மாறாது. இதனை ஆற்றல் காப்புக் கொள்கை (Conservation of Energy) என்பர்.

இவையே இயக்க வியலின் முக்கிய அடிப்படைகளாகும்.

II. வளைவரையில் இயங்கும் துகள்

1-6. அலகுத் தொடுகோடு (Unit-Tangent Vector)

APQ என்பது வளைவரை ; *O* என்பதை ஆதியாகக்கொள்ள



படம் 70.

$\bar{OP} = \bar{r}$ ஆகுக.

$\bar{OQ} = \bar{r} + \Delta\bar{r}$ ஆகுக.

$\therefore \quad \bar{PQ} = \Delta\bar{r}$

AP எனும் வில்லின் நீளம் s ஆகுக.

$\therefore$ *PQ* எனும் வில்லின் நீளம் Δs ஆகுக.

அப்போது $\underset{\Delta s \to 0}{Lt} \dfrac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta r} \to 1$ ஆகும்.

$\Delta \bar{r}$ இன் திசை, எல்லையில் P-ல் உள்ள தொடுகோடாகும். அதாவது PQ தொடுகோடாகும். இந்தத் தொடுகோட்டு திசையில், s அதிகரிக்கும் திசையில் $\bar{t}$ என்பது அலகு வெக்டராகுக. இதனை அலகுத் தொடுகோடு எனக்கூறுவர். $\underset{\Delta s \to 0}{Lt} \dfrac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \bar{t}$ ஆகும்.

1-7. அலகுச்செங்கோட்டு வெக்டர் (Unit Normal Vector)

$\bar{u}$ என்பது ஏதேனும் அலகு வெக்டராகுக $\therefore\ \bar{u} \cdot \bar{u} =$ நிலை எண்ணாகுக.

$\bar{u}$ என்பது s எனும் எண்கணியத்தின் சார்பலனானால்

$$\frac{d}{ds}(\bar{u} \cdot \bar{u}) = 0$$

$$\therefore\ \bar{u} \cdot \frac{d\bar{u}}{ds} = 0$$

$\therefore$ $\bar{u}$ எனும் வெக்டரும் $\dfrac{d\bar{u}}{ds}$ எனும் வெக்டரும் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

$\bar{t}$ என்பது அலகு வெக்டரானதால் $\bar{t}$-ம் $\dfrac{d\bar{t}}{ds}$ -ம் ஒன்றற்கொன்று குத்தாகும்.

$\dfrac{d\bar{t}}{ds} = k\,\bar{n}$ ஆகுக. $\bar{n}$ என்பது அலகு செங்கோட்டு வெக்டர் எனப்படும். k என்பது வரையின் P-ல் உள்ள வளைவு (curvature) எனப்படும் $k = \dfrac{1}{\rho}$ என்றால், ρ என்பது வளையாரம் (radius of curvature) எனப்படும்.

1-8. தொடுகோட்டுத்திசை, செங்கோட்டுத்திசைகளில் திசைவேகமும், முடுக்கமும்

't' நேரத்தில் துகளின் நிலை P ஆகுக.

O எனும் ஆதிக்கு $\overline{OP} = \bar{r}$ ஆகுக.

$t + \triangle t$ நேரத்தில் நிலை Q ஆகுக, அதன் நிலவெக்டர் $\bar{r} + \triangle \bar{r}$

$$\therefore \quad \text{திசைவேகம் } \bar{V} = \underset{\triangle t \to 0}{Lt} \frac{\triangle \bar{r}}{\triangle t} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

$$\therefore \quad \bar{V} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad \text{ஆனால் } \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{t}$$

$$\therefore \quad \bar{V} = \frac{ds}{dt} \bar{t}$$

ஆகவே திசைவேகம் தொடு கோட்டுத் திசையில் மட்டுமே உள்ளது (செங்கோட்டுத் திசையில் இல்லை). அதன் அளவு v எனின் $v = \frac{ds}{dt}$ ஆகும்.

முடுக்கம்

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\bar{t}\right)$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}\bar{t} + \frac{ds}{dt}\frac{d\bar{t}}{dt}$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}\bar{t} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\bar{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

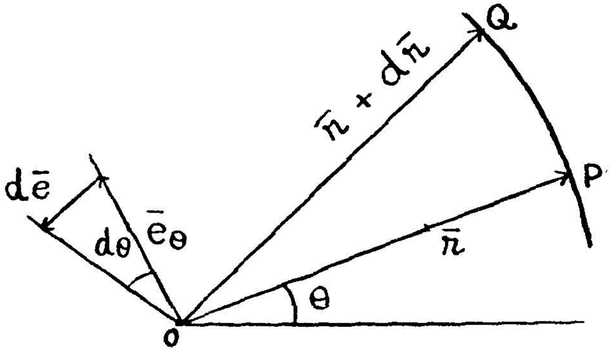
$$= \frac{d^2 s}{dt^2}\bar{t} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \bar{n}$$

$$= \frac{d^2 s}{dt^2}\bar{t} + \text{k } v^2\, \bar{n} = \frac{d^2 s}{dt^2}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n}$$

தொடுகோட்டுத் திசையில் முடுக்கம் $= \frac{d^2 s}{dt^2}$ அல்லது $\frac{du}{dt}$.

செங்கோட்டுத் திசையில் அதாவது லம்ப முடுக்கம் $= \text{k}V^2$ அல்லது $\frac{V^2}{\rho}$.

1-9. ஆரை முடுக்கமும், குறுக்கு முடுக்கமும். (Radial and transverse acceleration)



படம் 71.

வளைவரையில் துகள் P எனும் நிலையில் உள்ளது. O என்பது ஆதி. OX எனும் கோட்டுடன் OP, θ சாய்வில் இருக்கட்டும். $OP = r$ ஆகுக. அப்போது P-ன் கோண தூரக் கூறுகள் (r, θ) ஆகும். OP திசையில் அலகு வெக்டர் $\bar{e}_r$ ஆகுக; அதற்குக் குத்துத் திசையில் அலகு வெக்டர் $\bar{e}_\theta$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \bar{OP} = \bar{r} = r\,\bar{e}_r.$$

$$\therefore \quad \bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{e}_r + r\frac{d}{dt}\bar{e}_r$$

$$\text{ஆனால்} \quad \frac{d\bar{e}_r}{dt} = \frac{d\bar{e}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \bar{e}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \quad \bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{e}_\theta$$

துகளின் திசை வேகத்தின் OP திசையில் உள்ள பிரிவு $\frac{dr}{dt}$ அல்லது $\dot{r}$

அதற்குக் குத்துத் திசையில் பிரிவு $r\frac{d\theta}{dt}$ அல்லது $r\theta'$.

முடுக்கம்

இங்கு $\frac{d\bar{e}_r}{dt} = \bar{e}_\theta \frac{d\theta}{dt}$ எனவும்,

$$\frac{d\bar{e}_\theta}{dt} = -\bar{e}_r \frac{d\theta}{dt}$$ எனவும் அறிய வேண்டும்.

[ஏனெனில், அலகு வெக்டரின், நுண் விகித வெக்டர் அதற்குக் குத்தாக θ அதிகரிக்கும் திசையில் உள்ளது.]

$$V = \dot{r}\,\bar{e}_r \times r\,\dot{\theta}\,\bar{e}\theta$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} = \left(\ddot{r}\,\bar{e}_r + \dot{r} \cdot \frac{d}{at}\,\bar{e}_r\right)$$

$$+\left(\dot{r}\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\bar{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\bar{e}_\theta}{dt}\right)$$

$$= (\ddot{r}\,\bar{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\bar{e}_\theta)$$

$$+ (\dot{r}\,\dot{\theta}\,e_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\bar{e}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\,\bar{e}_r)$$

$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\bar{e}_r + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\bar{e}_\theta$$

$$= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\bar{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta}) \cdot \bar{e}_\theta$$

∴ ஆரைத்திசையில் முடுக்கம் $= \ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2$

குறுக்கு முடுக்கம் $= \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}(r^2\,\dot{\theta})$

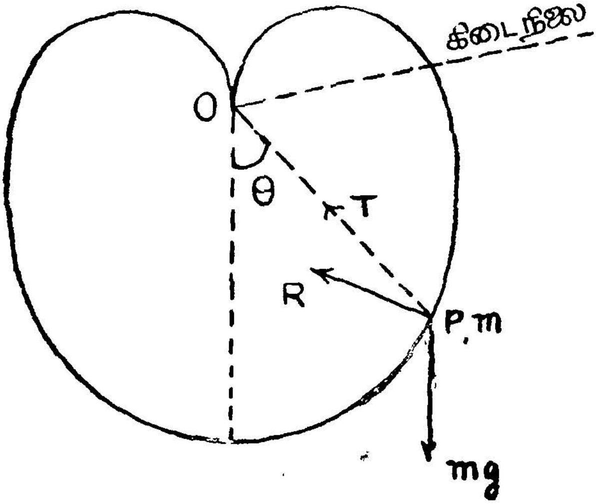
கணக்கு 1

நெஞ்சுவளை உருவில் ஒரு கம்பி அமைக்கப்பட்டுள்ளது. அதன் சமன்பாடு $r = a(1 + \cos\theta)$. அதன் அச்சு நேர்கீழாக நிலைக் கோட்டில் உள்ளது. கம்பியில் நகரும் ஒரு மணி $r = 0$ எனும் புள்ளியுடன் ஓர் இழுக்கக் கூடிய கயிற்றால் இணைக்கப் பட்டுள்ளது. கயிற்றின் இயல்பான நீளம் a. இழு குணகம் $4mg$. கயிறு கிடை நிலையில் இருக்கும்போது, மணி சமநிலையில்

உள்ளது. என்றால், t நேரத்தில் $a\dot{\theta}^2(1+\cos\theta)-g\cos\theta(1-\cos\theta)=0$ என நிறுவுக. அல்லாமலும் $\theta=\frac{\pi}{3}$ எனும் நிலை ஓர் உறுதிச் சமநிலை எனவும், அதைச் சுற்றி சிறு அலைவுகள் ஏற்பட்டால், அலைவு காலம் $2\pi(2a/g)^{1/2}$ எனவும் காட்டுக.

தீர்வு :

(i) 't' நேரத்தில் மணியின் நிலை (r, θ) ஆகுக. அதன் வேகம் $(\dot{r}, r\dot{\theta})$ என இரு பிரிவுகளால் தரப்படுகிறது.



படம் 72.

$$\therefore \text{ அதன் இயங்கு ஆற்றல் } = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$$

$$\text{ஆனால் } r = a(1+\cos\theta)$$

$$\therefore \dot{r} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\therefore \text{ இயங்கு ஆற்றல் } = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2[\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2]$$

$$= ma^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta)$$

அதன் நிலை ஆற்றல் $= -mg\, r\cos\theta$ (முதல் நிலையை O-எனக் கொள்ள]

$= -mg\, a\cos\theta\,(1+\cos\theta)$

கயிற்றின் நிலை ஆற்றல் $= \frac{1}{2}\lambda\frac{(r-a)^2}{a}$

$= \frac{1}{2}4mg\frac{a^2\cos^2\theta}{a}$

$= 2mga\cos^2\theta$

விசைகள் யாவும் ஆற்றல் காப்பு விசை ஆதலால் t நேரத்தில் உள்ள ஆற்றல், $t=0$ எனும் நேரத்தில் உள்ள ஆற்றலுக்குச் சமம். ஆனால் $t=0$ எனும் நேரத்தில் ஆற்றல் $=0$

$$ma^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) - mg\,a\cos\theta\,(1+\cos\theta) + 2m.\,a\cos^2\theta = 0$$

$$\therefore \quad a\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) - g\cos\theta\,(1-\cos\theta) = 0$$

(ii) மேலுள்ள சமன்பாட்டின் வகைக் கெழு காண

$$2a\ddot{\theta}(1+\cos\theta) - a\dot{\theta}^2\sin\theta + g\sin\theta\,(1-2\cos\theta) = 0$$

சமநிலையில் $\dot{\theta}=0\ \ddot{\theta}=0$

$$\therefore \sin\theta\,(1-2\cos 0) = 0$$

$$\therefore \quad \theta = 0 \text{ அல்லது } \cos\theta = 1/2 \ \therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$$

அலைவுகாண; $\theta = \frac{\pi}{3} + x$ என இடவும். இங்கு x மிகவும் சிறியது.

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \dot{x}\ \ddot{\theta} = \ddot{x}$$

$$\therefore \quad 2a\ddot{x}\left[1+\cos\overline{\frac{\pi}{3}+x}\right] - a\dot{x}^2\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$+ g\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\left(1-2\cos\frac{\pi}{3}+x\right) = 0$$

x, $\dot{x}$ என்பவற்றின் முதற்படிக்குமேல் உள்ள உறுப்புகளைக் கணக்கிலெடுக்க வேண்டியதில்லை.

அப்போது $\ddot{x} + \frac{g}{2a} x = 0$ என வரும்.

$$\ddot{x} = -\frac{g}{2a} x$$

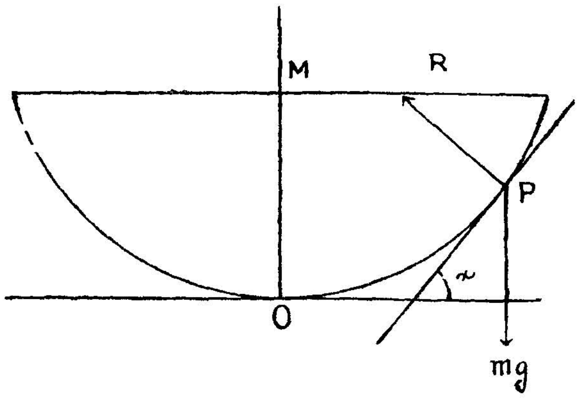
ஆகவே, சமநிலையைச் சுற்றியுள்ள தனி இசை இயக்கம் ஆதலால், சமநிலை உறுதியானதெனவும், அலைவு காலம் $2\pi \ (2a/g)^{1/2}$ எனவும் காண்கிறோம்.

கணக்கு 2 :

ஓர் உருள்வளை (Cycloid) வடிவத்தில் உள்ள வழவழப்பான கம்பி அதன் இருமுனைகள் கிடைக்கோட்டில் அமையுமாறும் வளைபாகம் கீழ் நோக்கிச் செல்லுமாறும் வைக்கப்பட்டு விடப்படுகிறது. புவிஈர்ப்பு விசையால் ஏற்படும் அதன் இயக்கம் கம்பியில் இருபுறமும் அலையும் தனியிசை இயக்கம் எனக்காண்க.

தீர்வு

't' நேரத்தில்



படம் 73.

P எனும் இடத்தில் மணி (Bead) யுள்ளது. அதன் திணிவு *m* ஆகுக. அதன்மேல் செயல்படும் விசைகள் கீழ் நோக்கி mg; தாங்குவிசை R, செங்கோட்டு திசையில் தொடு கோடு கிடைக் கோட்டுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் ψ ஆகுக,

மிகக்கீழ்ப்புள்ளி O ஆகுக. CP எனும் வில்லின் நீளம் s ஆகுக அப்போது

$s = 4a \sin \psi$ (உருள்வளை உயரம் $2a$)

இயக்கச் சமன்பாடுகள்

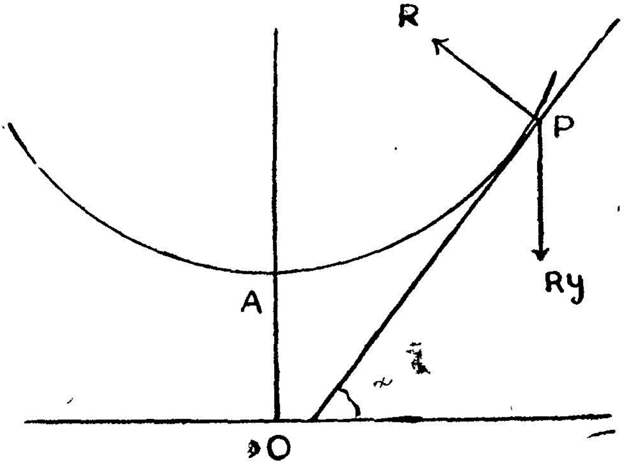
$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \psi \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a} s$$

இது தனியிசையியக்கச் சமன்பாடாகும். ஆகவே, கம்பியின் எந்த இடத்தில் விடப்பட்டாலும் மணி, O-விற்கு இரு புறமும்

$2\pi \left(\frac{4a}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$ எனும் அலைவு காலத்துடன் ஊசலாடும்.

கணக்கு 3

கயிற்று வளை வடிவிலுள்ள ஒரு வழவழப்பான கம்பி கிடைக் தளத்தில் வைக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு சிறு வளையம் அதில் இயங்குமாறு உள்ளது. கயிற்று வளையின் இயக்கு வரையிலிருந்து (directrix) வளையத்தின் தூரத்துடன் நேர் விகிதத்திலுள்ள ஒரு



படம் 74.

விசை அதன்மேல் செயல்பட்டால், வளையம் தனி இசையியக்கத் துடன் இயங்குமெனக் காண்க. அதன்மேல் தாங்கு விசை,

விசையின் அளவின் வர்க்கத்துடன் தலைகீழ் விகிதத்தில் உள்ள தெனவும் காண்க.

தீர்வு

படத்தில் வளையும், வளையமும் காட்டப்பட்டுள்ளது.

t நேரத்தில் வளையம் P எனும் நிலையில் உள்ளது. கயிற்று வளையின் சமன்பாடு $y = C \cos h \frac{c}{x}$

வில் $AP = s$ ஆகுக. P-ல் உள்ள தொடுகோடு

x அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் ψ ஆகுக.

அப்போது சமன்பாடு $s = C \tan \psi$

அல்லாமலும் $y = C \sec \psi$.

இயக்கச் சமன்பாடு $m \frac{d^2 s}{dt^2} = -Ry \sin \psi$

$$= -k\, C \sec \psi \sin \psi$$

$$= -k\, C \tan \psi$$

$$= -k\, s$$

$$\therefore \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{k}{m} s$$

ஆகவே, வளையம், கயிற்று வளையில் எங்கு விடப்பட்டாலும், தனி இசை இயக்கத்துடன் இயங்கும்.

தாங்கு விசை காண

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - ky \cos \psi$$

ஆனால் $\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} s$

$$\therefore \frac{vdv}{dt} = -\frac{k}{m} s \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore v^2 = A - \left(\frac{k}{m}\right) s^2$$

$$\therefore \quad R = ky \operatorname{Cos} \psi + \left(\frac{m}{\rho}\right)\left[A - \frac{k}{m}s^2\right]$$

ஆனால் $\rho = \dfrac{ds}{d\psi} = C \sec^2 \psi$

$$\therefore \quad R = k\,C \sec \psi \cos \psi + \frac{mA}{C}\cos^2 \psi - k\,C \sin^2 \psi$$

$$= k\,C\,(1 - \sin^2 \psi) + \frac{mA}{C}\cos^2 \psi$$

$$= \left(\frac{k\,C + mA}{C}\right)\cos^2 \psi \quad \text{ஆனால்} \quad y = C \sec \psi$$

$$R = \frac{(k\,C + mA)\,C}{y^2}$$

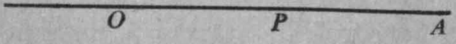
∴ தாங்கு விசை, செயல்படு விசையின் வர்க்கத்துடன் தலைகீழ் விகிதத்தில் உள்ளது.

2. துகளின் நேர்கோட்டியக்கம்

(RECTILINEAR MOTION OF A PARTICLE)

I. மாருவிசை செயல்பட ஏற்படும் இயக்கம்
(Motion under a Constant Force)

மாருவிசை என்றதால், விசையின் அளவும் திசையும், காலத்தைச் சார்ந்ததல்ல, நிலேயானது எனப்பொருளாகும். ஓர் அலகுத்திணிவுடைத்துகளின் மேல் செயல்படும் விசை f என்ருல், அதனுல் ஏற்படும் முடுக்கமும் f ஆகும். அதுவும் நிலேயானது. நேர்கோட்டில் O எனும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்வோம். OA எனும் திசையில் முடுக்கம் f ஆகுக. 't' நேரத்தில் துகளின் நிலே P ஆகுக. $OP = x$ ஆகுக. அப்போது துகளின் நிலே x எனும் எண்ணுல் குறிக்கப்படுகிறது.



படம் 75.

$\therefore$ அதன் திசை வேகம் 't' நேரத்தில் v எனின் $v = \dfrac{dx}{dt}$,

முடுக்கம் f எனின் $f = \dfrac{dv}{dt}$ அல்லது $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ அல்லது $\dfrac{vdv}{dx}$.

$$\left[\frac{dv}{dv} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dv} = \frac{dv}{dx} v = \frac{vdv}{dx}\right]$$

$t = 0$ எனும்போது $v = u$ ஆகுக; $x = 0$ ஆகுக.

$$\therefore \frac{dv}{dt} = f \qquad \therefore \int_u^v dv = \int_0^t f\,dt$$

$$\therefore v - u = ft \qquad \therefore v = u + ft \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = u + ft \qquad \therefore \int_0^x dx = \int_0^t (u + ft)\,dt$$

$$\therefore \underline{x = ut + \frac{1}{2} ft^2} \qquad \ldots\ldots (3)$$

$$v\frac{dv}{dx} = f$$

$$\therefore \int_u^v v\,dv = \int_0^x f\,dx$$

$$\therefore \frac{v^2 - u^2}{2} = fx$$

$$\therefore \underline{v^2 = u^2 + 2fx} \qquad \ldots\ldots (2)$$

என இயக்கத்தை விவரிக்கும் மூன்று சூத்திரங்கள் வருகின்றன. 't' நேரத்தில் திசைவேகம் என்ன? 't' நேரத்தில் துகளின் நிலை என்ன? ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில் அதன் திசை வேகம் என்ன? எனும் கேள்விகளுக்கு, மேற்கூறிய சூத்திரங்கள் பதில் கூறுகின்றன.

புவியீர்ப்பு விசை செயல்படும் துகள் (Particle under Gravity)

விசை, துகளின் துவக்க வேகத்திற்கு எதிராகச் செயல் பட்டால், முடுக்கமும் எதிர்த்திசையிலாகும். எடுத்துக்காட்டாக, நேர்மேலே எறியப்படும் கல்லுக்கு எதிராகச் செயல்படுவது புவியீர்ப்பு விசையாகும். அதனால் ஏற்படும் முடுக்கம் 'g' கீழ் நோக்கியுள்ளது. மேல் நோக்கு தூரத்தை, அதாவது உயரத்தை நேரெண்ணால் குறித்தால், மேற்கூறிய சூத்திரங்களில் $f = -g$ எனப்பிரதியிட வேண்டும்.

அப்போது (i) $v = u - gt$

(ii) $x = ut - \frac{1}{2}gt^2$

(iii) $v^2 = u^2 - 2gx$ என வருகிறது.

இந்தச் சூத்திரங்கள் தரும் செய்திகளைக் காண்போம்.

(1) முதல் சூத்திரம்

$v = u - gt.$

(i) $t = \frac{u}{g}$ எனும் நேரத்தில் $v = 0$ ஆகிறது. துகளின் திசை வேகம் பூச்சியம். $t < \frac{u}{g}$ எனும் வரை v நேரெண்ணாகிறது. அதாவது துகள் மேல் நோக்கிச்செல்கிறது. $t > \frac{u}{g}$ எனும்போது அதன் வேகம் எதிரெண்ணாகும். கீழ் நோக்கி வருகிறது. அதன் திசை மாறுது. ஆகவே, $\frac{u}{g}$ நேரத்தில் அது மிகுந்த உயரத்தை அடைகிறது.

(2) இரண்டாவது சூத்திரம்

$x = ut - \frac{1}{2}gt^2$

(ii) ஒரு குறிப்பிட்ட நிலையில், 't' நேரெண்ணாக இருக்கும் வரை, இரண்டு நேரத்தில் துகளைக் காணமுடியும். குறிப்பாக $x = 0$ என்றால் $t = 0$ அல்லது $t = \frac{2u}{g}$ எனக் காண்கிறோம். அதாவது புறப்படும் இடத்திற்கு மீண்டும் வர ஆகும் காலம் $\frac{2u}{g}$ (Time of flight)என முக்கிய சூத்திரம் வருகிறது.

$$gt^2 - 2ut + 2gx = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 2gx}}{g}$$

$\therefore$ $u^2 - 2gx$ என்பது எதிரெண்ணானால்

அதாவது $x > \frac{u^2}{2g}$ ஆனால் 't' கற்பனை எண்ணாகும்.

அதாவது $\frac{u^2}{2g}$ எனும் உயரத்தில் மேல் துகளைக் காண்பது என்பது 'கற்பனையே'. ஆகவே u திசை வேகத்துடன் மேல் எறியப்படும் கல் போகும் மீ. உயரம் (Maximum height) $\frac{u^2}{2g}$ ஆகும்.

(3) மூன்றாவது சூத்திரம்

$$v^2 = u^2 - 2gx$$

$$\therefore \quad v = \pm \sqrt{u^2 - 2gx}.$$

(iii) $x > \frac{u^2}{2g}$ எனின் v கற்பனை எண்ணாகும். x-ன் மிக உயர்ந்த மதிப்பு $\frac{u^2}{2g}$ என இங்கும் காண்கிறோம்.

$0 \leq x \leq \frac{u^2}{2g}$ எனும் நிலையில், துகள் இரண்டு நேரங்களில் காணப்படும் என்று கூறினோம். இந்தச் சூத்திரம் தரும் செய்தி அந் நேரங்களில் துகளின் வேகங்கள் அளவில், சமம். ஆனால் திசையில் எதிர் என்பதாம். முதல் நேரத்தில் எந்த வேகத்துடன் மேல் நோக்கிச் செல்கிறதோ, அதே வேகத்துடன் இரண்டாவது நேரத்தில் கீழ் நோக்கிச் செல்கிறது எனும் செய்தியை இந்தச் சூத்திரம் தருகிறது.

குறிப்பாக $x = 0$ எனும் போது, அதாவது புறப்படும் இடத்தில், புறப்படுவேகம் $=$ திரும்பு வேகம் $= u$ எனக் காண்கிறோம். [$x = 0$ என்றால் $v \pm u$.]

[பல கணக்குகளில் இந்தச் செய்திகளை நேரடியாகப் பயன் படுத்தலாம் ஆதலால் இவற்றை மீண்டும் தருகிறோம். புறப்படு வேகம் u, எனவும் எதிர் முடுக்கம் 'g' ஆகவும் ஆனால், (i) மிக அதிக தூரம் புறப்படு திசையில் செல்ல ஆகும் நேரம் $\frac{u}{g}$ (ii) மிக அதிக தூரம் $= \frac{u^2}{2g}$ (iii) புறப்படு வேகம் $=$ திரும் வேகம் $= u$].

தடைபடு இயக்கம் (Motion under resisting medium)

ஒரு துகள் காற்றிடையே இயங்கும் போது அதன் இயக்கத் திற்குத் தடை ஏற்படுகிறது. துகளின் வேகம் அதிகமானால்

தடைவிசையும் அதிகமாவதைக் காணலாம். தடைவிசை வேகத்தின் வர்க்கத்துடன் நேர்விகிதத்தில் இருப்பதைக் காணலாம். ஆனால், திட்டவட்டமாக ஒரு விதியைக் கூற முடியாது. ஆகவே, தடைவிசைக்கு எடுகோளாக (Postulate) ஒவ்வொரு விதியைக் கொண்டு இயக்கம் எவ்வாறுகிறது எனக் காண்போம்.

கணக்கு 1

ஒரு துகளின்மேல் ஒரு சீரான விசை செயல்படுகிறது. அது இயங்கும்போது, தடைவிசை, திசை வேகத்துடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ளது என்றால், திசை வேக அளவு ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்கு மேல் மீறாது எனக் காண்க.

தீர்வு

துகள் நேர்கோட்டில் இயங்குகிறது. சீரான விசை அலகுத்திணிவுக்கு 'f' ஆகுக; 't' நேரத்தில் திசை வேக அளவு v ஆகுக. அப்போது தடைவிசை kv துகள் நிலையின் கூறு (Coordinate) x என்றால்

$$\ddot{x} = f - kv \qquad (f > kv \text{ என்போம்}).$$

$$\frac{dv}{dt} = f - kv$$

v அதிகரிக்கும்போது kv யும் அதிகமாகும். ஆகவே, v-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு — V என்க — $f - kv = 0$ அதாவது $V = \frac{f}{k}$ ஆகும். அப்போது $\frac{dv}{dt} = 0$ அதாவது V என்பது v-ன் மீப்பெரு மதிப்பு ஆகும்.

இவ்வாறு உந்து விசைக்குச் சமமாகவும், (equal to propelling force) எதிராகவும், தடைவிசை அதிகரிக்கும் போது ஏற்படும் துகளின் வேகம் 'எல்லை வேகம்' (limiting or terminal velocity) எனப்படும்.

குறிப்பு : துகளின் புறப்படுவேகம் எல்லை வேகத்தைவிடக் குறைவானால், அதன் வேகம் அதிகரித்து எல்லை வேகத்தை அடையும். பிறகு அதே வேகத்துடன் இயங்கும்.

ஆனால், புறப்படுவேகம் எல்லை வேகத்தைவிட அதிகமானால், அது குறைந்து கொண்டே வரும். ஆகவே முடுக்கம், எதிர்

முடுக்கமாகும். எல்லை வேகம் V வந்தவுடன் துகள் சீராக இயங்கும்.

கணக்கு 2

ஒரு துகள் புவியீர்ப்பு விசையால் இழுக்கப்பட்டுக் கீழே விழுகிறது. காற்றின் தடைவிசை, குறிப்பிட்ட நேரத்தில், திசை வேகத்துடன் நேர்விகிதத்தில் உள்ளது. 't' நேரத்தில் அது விழும் தூரம் $\frac{g}{k}\left[\frac{1}{k}\, e^{-kt} + t - \frac{1}{k}\right]$ எனக் காண்க.

[தடைவிசை $= mkv$, m என்பது துகளின் திணிவு.]

தீர்வு

$$m\ddot{x} = mg - mkv$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = g - k\dot{x}$$

$$\frac{dv}{dt} + kv = g$$

$$\therefore \quad v\, e^{kt} = \frac{g\, e^{kt}}{k} + A$$

ஆனால் $t = 0$ எனும் போது $v = 0 \therefore \quad A = -\frac{g}{k}$

$$\therefore \quad v\, e^{kt} = \frac{g\,(e^{kt} - 1)}{k}$$

$$\boxed{v = \frac{g}{k}\,(1 - e^{-kt})}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{k} - \frac{g}{k}\, e^{-kt}$$

$$\therefore \quad x = \frac{g}{k}\, t + \frac{g}{k^2}\, e^{-kt} + B$$

$t = 0$ எனும் போது $x = 0 \therefore \quad B = -\frac{g}{k^2}$

$$\therefore \quad x = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} e^{-kt} - \frac{g}{k^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{g}{k}\left[\frac{e^{-kt}}{k} + t - \frac{1}{k}\right]$$

கணக்கு 3

புவியீர்ப்பு விசையால் இழுக்கப்பட்டு விழும் ஒரு துகளின் மேல் செயல்படும் தடைவிசை, μv^n என்றால் எல்லை வேகம் என்ன? (t நேரத்தில் துகளின் வேகம் v)

தீர்வு

$$m\ddot{x} = mg - mkv^n$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} + kv^n = g$$

V எல்லை வேகமாகும் போது $\frac{dv}{dt} = 0 \therefore \quad V^n = \frac{g}{k}$

$$\therefore \quad V = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/n}$$

கணக்கு 4 :

மேல் கணக்கில், x தூரம் விழுந்ததும், துகளின் வேகம் என்ன ?

தீர்வு

$$u = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$$x = \frac{g}{k}\left(\frac{e^{-kt}}{k} + t - \frac{1}{k}\right)$$

இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளிலிருந்து 't' ஐ நீக்க வேண்டும்.

$$1 - e^{-kt} = \frac{kv}{g}$$

$$+ e^{-kt} = \frac{g - kv}{g}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{k} \log \left(\frac{g}{g - kv} \right)$$

$$\therefore \quad x = \frac{g}{k}\left[\frac{1}{k} \frac{g - kv}{g} + \frac{1}{k} \log \frac{g}{g - kv} - \frac{1}{k} \right]$$

$$= \frac{g}{k^2}\left[\log \frac{g}{g - kv} - \frac{kv}{g} \right]$$

குறிப்பு :

எல்லை வேகம் காண $\ddot{x} = 0 \quad \therefore \quad V = \frac{g}{k}$

ஆனால் $v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$ எனும் சமன்பாட்டில் பிரதியிட

$$\frac{g}{k} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\therefore \quad e^{-kt} = 0 \quad \therefore \quad t \to \infty$$

ஆகவே, 'எல்லை வேகம்' குறிப்பிட்ட எந்த நேரத்திலும் வராது. ஆனால், வேகம் இதை அணுகிக் கொண்டே இருக்கும்.

கணக்கு 5

நேர் மேலே எறியப்படும் ஒரு கல்லின்மேல், வேகத்தின் வர்க்கத்துடன் நேர் விகிதத்தில் உள்ள தடை விசை செயல் படுகிறது. இயக்கத்தை விவரி.

தீர்வு

புறப்படும் இடத்திலிருந்து 't' நேரத்தில் கல்லின் உயரம் x ஆகுக. திணிவு m; t நேரத்தில் வேகம் v; $\therefore$ தடை விசை $= mkv$ ஆகுக.

$$\therefore \quad m\ddot{x} = -mg - mkv.$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} + kv = -g.$$

$$\therefore \quad v\,e^{kt} = -g\,\frac{e^{kt}}{k} + A$$

$t = 0$ எனும்போதும் $v = V \quad \therefore \quad A = V + \frac{g}{k}.$

$$\therefore \quad v\,e^{kt} = V + \frac{g}{k} - \frac{g}{k}\,e^{kt}$$

$$\therefore \quad v = \left(V + \frac{g}{k}\right) e^{-kt} - \frac{g}{k}.$$

(i) 't' அதிகரிக்கும்போது v குறைகிறது எனக் காண்கிறோம்.

(ii) மிக அதிக உயரம் அடையும் நேரம் 't_1' என்றால், அப்போது $v = 0$

$$\therefore \quad \left(V + \frac{g}{k}\right) e^{-kt_1} = \frac{g}{k}.$$

$$\therefore \quad e^{kt_1} = \frac{k}{g}\left(V + \frac{g}{k}\right)$$

$$\therefore \quad t_1 = \frac{1}{k}\log\left(\frac{kV + g}{g}\right)$$

[இந்த நேரத்திற்குப் பிறகு துகள் கீழே இறங்கும். இயக்கச் சமன்பாடு $m\ddot{x} = mg - mkv$ (x இப்போது ஆழம்) என முதற் கணக்கின் படி காணவேண்டும்.]

x-க்கும் 't'-க்கும் உள்ள தொடர்பு

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{g}{k} + V\,e^{-kt} + \frac{g}{k}\,e^{-kt}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{g}{k}t - \frac{V\,e^{-kt}}{k} - \frac{g}{k^2}\,e^{-kt} + B$$

$t = 0$ எனும்போது $x = 0$

$$0 = -\frac{V}{k} - \frac{g}{k^2} + B$$

$$B = -\frac{V}{k} + \frac{g}{k^2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{k}\left[V + \frac{g}{k}\right] - e^{-kt}\left[\frac{V}{k} + \frac{g}{k^2}\right] - \frac{gt}{k}$$

$$x = \frac{1}{k}\left(V + \frac{g}{k}\right)(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}.$$

மிக உயரம் காண $\frac{dx}{dt} = 0$ எனும்படி இருக்கவேண்டும்.

$$\left(V + \frac{g}{k}\right) = \frac{g}{k}\, e^{-kt}$$

$$\therefore \quad e^{-kt} = \left(\frac{kV}{g} + 1\right)$$

$$e^{-kt} = \frac{g}{g + kV}$$

மிக உயரம் H என்றால்

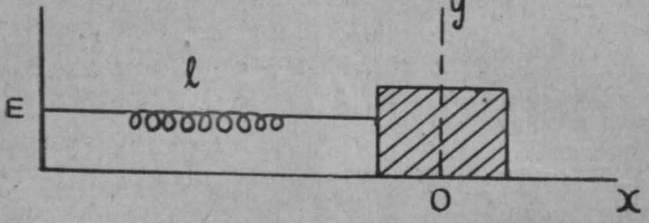
$$H = \frac{1}{k}\left(V + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \frac{g}{g + kV}\right) - \frac{g}{k^2}\log\left(\frac{kV}{g} + 1\right).$$

$$H = \frac{V}{k} - \frac{g}{k^2}\log\left(\frac{g + kV}{g}\right)$$

II தனி இசை இயக்கம்

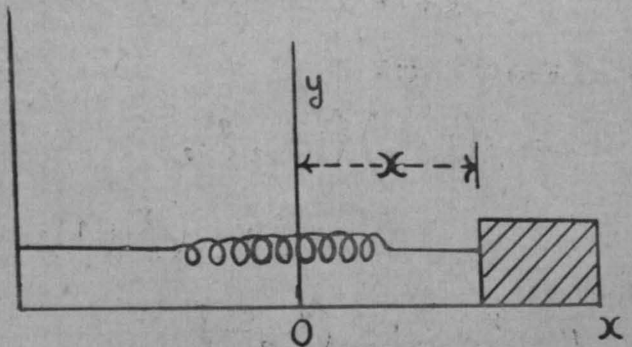
(Simple Harmonic Motion)

படத்தில் வழுவழுப்பான ஒரு சமதளத்தில் (x-அச்சு எனக் காட்டப்பட்டுள்ளது) m திணிவுள்ள துகள், இயல்பான நீள முடைய ஒரு சுருள் கம்பியின் ஒரு நுனியில் பொருத்தப்பட்டுள்ள தாகக் காட்டப்பட்டுள்ளது. அதன் நீளம் l, கம்பியின் மற்றொரு நுனி E எனும் ஒரு நிலப்புள்ளியில் பொருத்தப்பட்டுள்ளது.



படம் 76.

துகள் சற்றே வலப்புறம் நகர்த்தி விடப்பட்டால், சுருள் கம்பி நீட்டப்பட்டு விடப்படும்.



படம் 77.

அப்போது துகள் அதன் முதல் நிலையாகிய O-விற்கு இரு புறமும் ஊசலாடும்.

அதன் நிலை 't' நேரத்தில் O-விலிருந்து x தூரமானால் அதன் மேல் கம்பியினால் செயல்படும் இழுவிசை O-வை நோக்கி O-விலிருந்து அதன் தூரத்துடன் நேர் விகிதத்தில் இருக்கும் என ஹூக்கின் விதி (Hock's law) கூறுகிறது.

அதாவது விசை $= \mu x$ (அளவில்)

$\therefore$ இயக்கச் சமன்பாடு $m\ddot{x} = -\mu x$ என்பதாகும்.

$$\text{அதாவது} \quad \ddot{x} = -\frac{\mu}{m} x.$$

தனி இசை இயக்கவரையறை

இது போன்று, நேர்கோட்டில் இயங்கும் ஒரு துகளின் முடுக்கம்' கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளியை நோக்கியும் அதிலிருந்துள்ள தூரத்துடன் நேர் விகிதத்திலும் இருந்தால் ஏற்படும் இயக்கம் தனி இசை இயக்கம் (Simple Harmonic Motion) எனப்படும்.

[இவ்வாறு சொற்களில் கூறுவதைவிட வரையறையைச் சமன்பாட்டில் தருவதே சாலச்சிறந்தது. அதாவது,

$\ddot{x} = -\mu x$ என ஆனால், அத்தகைய இயக்கம் தனியிசை இயக்கமாகும். இங்கு 'x' என்பது நேர்கோட்டில் இயங்கும் துகளின், அக் கோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி O விலிருந்துள்ள தூரமாகும். μ நிலை எண்ணாகும்.]

தனி இசை இயக்கத்தின் வீச்சம், அலைவு காலம்

$\ddot{x} = -\mu x$ என்பது தன் இசையியக்கச் சமன்பாடு. x என்பது துகளின் O-விலிருந்துள்ள தூரம்.

$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu x = 0$ என்பதாகும்.

இதன் பொதுத்தீர்வு

$x = A\cos\sqrt{\mu}\, t + B\sin\sqrt{\mu}\, t$

அல்லது $x = A\cos(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon)$ எனலாம்.

A, ϵ என்பவை நிலை எண்கள்.

$t = 0$ எனும் போது $x = a$ ஆகுக. $\frac{dx}{dt} = 0$ ஆகுக.

$\therefore$ $t = 0$ எனப் பிரதியியிட $a = A \cos \epsilon$ என வருகிறது.

$\frac{dx}{dt} = -A\sqrt{\mu} \sin(\sqrt{\mu}\, t + \epsilon)$ எனலாம்.

$t = 0$ எனப்பிரதியிட $A\sqrt{\mu} \sin \epsilon = 0$ $\quad \therefore \epsilon = 0$

$\therefore A = a$

(i) $x = a \cos \sqrt{\mu}\, t$

(ii) $\frac{dx}{dt} = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t$

$\therefore$ $v = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t$

(iii) $v^2 = \mu(a^2 - x^2)$

$$\left[\because \frac{v^2}{a^2 \mu} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \right]$$

என இயக்கத்தை விவரிக்கும் மூன்று சமன்பாடுகளைக் காண்கிறோம்.

[நேர்கோட்டில் சீரான விசை செயல்படும் துகளுக்கும் இது போன்று (u, t), (x, t), $(v\ x)$ எனும் ராசிகளின் தொடர்புகளைக் கூறும் மூன்று சமன்பாடுகளைக் கண்டோம் என்பதை இங்கு நினைவு கூறவேண்டும்.]

இந்தச் சமன்பாடுகள் தரும் செய்திகளை விவரிப்போம்.

$x = a \cos \sqrt{\mu}\, t\, ;\ v = -a\sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu}\, t$

(i) $t = t_1$ நேரத்தில் $x = x_1$ என்றால்

$x_1 = a \cos \sqrt{\mu}\, t_1$ ஆகும்.

$t = t_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{\pi}}$ நேரத்தில் $x = x_2$ என்றால்,

$$x_2 = a \cos \sqrt{\mu} \left(t_1 + \frac{2k\pi}{\sqrt{\mu}} \right)$$

$$= a \cos \sqrt{\mu}\, t + 2k\pi$$

k என்பது முழு எண்ணாகக் கொள்ள

$x_2 = a \cos \sqrt{\mu}\, t = x_1$

அதாவது ஒவ்வொரு $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ கால இடைவெளியில், துகள் அதே நிலைக்கு மீண்டும் மீண்டும் வருகிறது. அத்துடன் $v = -a\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}\,t$ ஆதலால், வேகமும் அந்த நேரங்களில் ஒரே அளவும் திசையும் உடையதாக இருக்கிறது. இவ்வாறு மீண்டும் மீண்டும் ஒரே நிலைக்கு வருவது துகளின் அலைவு அல்லது ஊசலாடுதல் (Oscillation) எனப்படும். ஓர் இடத்திலிருந்து புறப்பட்டு மீண்டும் அதே இடத்திற்கு அதே திசை வேகத்துடன் வருவதற்கு ஆகும் காலம் அலைவு காலம் (Period) எனப்படும்.

(ii) மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் நாம் காண்பது 'x'-இன் மிக அதிக மதிப்பு, அளவில் மட்டும் 'a' ஆகும். அதாவது $|x|$-ன் அதிகபட்ச மதிப்பு 'a' அல்லது $-a \leq x \leq a$ ஆகும்.

துகள் O-வின் இருபுறமும் 'a' தூரத்திற்குமேல் போகாது. இந்த அதிகபட்ச தூரம் தனி இசை இயக்கத்தின் **வீச்சம்** (Amplitude) எனப்படும்.

துவக்க நிலையும், அதிர்வு நிலையும் (Epoch and Phase)

$x = A\cos(\sqrt{\mu}\,t + \epsilon)$ என்ற பொதுச் சமன்பாட்டிலிருந்து x-ன் அதிகபட்ச மதிப்பு A எனத் தெரிகிறது. 'வீச்சம்' 'a' ஆனால் $A = a$ ஆகும்.

$$\therefore \quad x = a\cos(\sqrt{\mu}\,t + \epsilon) \text{ என ஆகிறது.}$$

$t = 0$ எனும் போது $x = x_0$ ஆகுக.

$$\therefore \quad x_0 = a\cos(\sqrt{\mu}\,0 + \epsilon)$$
$$= a\cos\epsilon$$
$$\therefore \quad \epsilon = \cos^{-1}\frac{x_0}{a}$$

இந்த கோணம் துவக்க நிலை (Epoch) எனப்படும்.

t நேரத்தில்உள்ள நிலை $\sqrt{\mu}\,t + \epsilon$ எனும் கோணத்தால் தரப்படும். இது அதிர்வு நிலை (Phase) எனப்படும் [கோணங்கள் யாவும் ரேடியன் அளவையில் கூறப்பட வேண்டும்].

அலைவு காலம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ எனக் கண்டோம். $\epsilon = 0$

என்றாலும், அல்லது வேறு எந்தக் கோணமாயினும் அலைவு காலம் $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ ஆகும்.

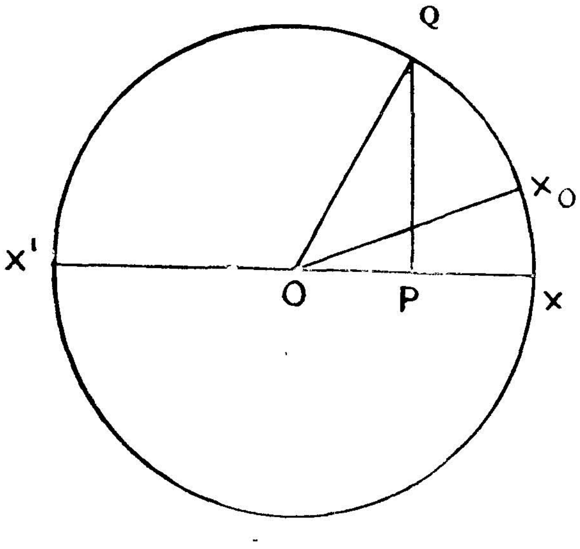
ஆகவே, தனி இசை இயக்கத்தின் அலைவுகாலம் வீச்சத்தையோ, அல்லது துவக்க நிலையையோ சார்ந்ததல்ல.

சீரான வட்ட இயக்கமும், தனியிசை இயக்கமும் (Uniform circular motion and S.H.M)

ஒரு துகள், ஒரு வட்டத்தின் மேல் சீரான வேகத்துடன் இயங்கினால், வட்டத்தின் ஒரு விட்டத்தின் மேல் அதன் வீழல் தனி இசை இயக்கத்துடன் இயங்கும்.

O என்பது வட்ட மையம் $= X'OX$ ஒரு விட்டம். Q வட்டத்தின் மேல் ஒரு துகள். $QP \perp^r X'OX$.

$\therefore$ P என்பது Q-வின் $X'OX$ மேல் உள்ள வீழல். Q-வின் வேகம் சீரானது.



படம் 78.

$\therefore$ O-வைச்சுற்றிய அதன் கோண வேகமும் சீரானது. இது 'n' ஆகுக. $t = 0$ நேரத்தில் Q-வின் நிலை X_0 ஆகுக.

$\therefore$ $\angle X_0OQ = nt$, $\angle XOX_0 = \epsilon$ ஆகுக.

$\therefore \quad \angle XOQ = nt + \epsilon$

$\therefore \quad OP = OQ \cos (nt + t)$; வட்ட ஆரம் a என்றால்,
$OP = a \cos (nt + t)$, $OP = x$ எனின்

$$x = a \cos (nt + \epsilon)$$

$\therefore \quad \ddot{x} = -n^2 x$ எனக் காண்கிறோம். அதாவது P-ன் இயக்கம் தனியிசை இயக்கமாகும்.

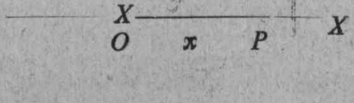
இவ்வாறு P-ன் விட்ட இயக்கத்திற்கும் Q-வின் வட்ட இயக்கத்திற்கும் ஒன்றற்கொன்றுள்ள (one one Correspondence) தொடர்பு காண்கிறோம். P-ன் தனி இசையியக்கம், Q-ன் சீரான வட்ட இயக்கத்தை ஆராய்ந்து காணப்படும் இங்கு $\angle XOX_0 = t$ என்பது துவக்கநிலை (Epoch). $\angle XOQ$ எனும் கோணம் அதிர்வு நிலை.

தடை பெறும் தனியிசை இயக்கம்

இதை ஓர் எடுத்துக்காட்டால் முதலில் விளக்குவோம்.

கணக்கு 1

2 அலகு திணிவுள்ள ஒரு துகள் XO-ன் மேல் O-வை ஆதியாகவுடைய x அச்சில் $8x$ அலகுள்ள விசை O வை நேர்க்கிச் செயல்படுகிறது $t = 0$ நேரத்தில் $x = 20$, அதன் வேகம் $= 0$; துகள் இயங்கும்போது அதன்மேல் அதன் வேகத்தைப்போல் 8 மடங்கு அளவுள்ள தடைவிசையும் செயல்படுகிறது என்றால் t நேரத்தில் (*i*) அதன் நிலை என்ன? (*ii*) திசை வேகம் என்ன? (*iii*) (t, x) எனும் ராசிகளின் தொடர்பை விளக்கும் வரைப்படம் வரைக.



படம் 79.

(i) P-ன் நிலை t நேரத்தில் x என்றால் அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2x}{dt^2}$. வேகம் $\frac{xp}{dt}$. அதன் மேல் செயல்படும் மொத்த விசை $= -8x - 8\frac{dx}{dt}$.

$$\therefore \frac{2d^2x}{dt^2} = -8x - 8\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

இதன் தீர்வு $x = e^{-2t}(A + Bt)$

$t = 0$ எனும் போது $x = 20$, $\frac{dx}{dt} = 0$ ஆனதால்

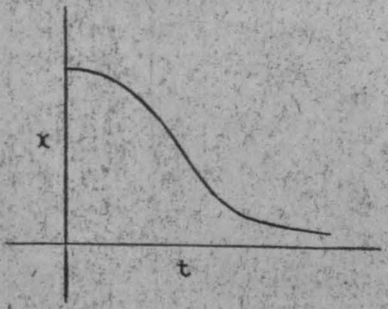
$A = 20$, $B = 40$ என வரும்

$$\therefore \quad x = 20\,e^{-2t}\,(1 + 2t)$$

எனும் சமன்பாடு துகளின் நிலையை 't' நேரத்தில் தருகிறது.

(ii) $\frac{dx}{dt} = -80\,e^{-2t}$ என்பது திசை வேகத்தைத் தருகிறது.

(iii) (t, x) எனும் தொடர்பைத்தரும் வரைப்படம் படத்தில் காட்டியுள்ளோம்.



படம் 80.

இதிலிருந்து தடை விசை செயல்படுவதால் துகளின் அலைவுகள் இல்லை எனவும், O எனும் ஆதியை நோக்கி இயங்குமே தவிர O-வை அடையாது எனவும் காண்கிறோம்.

இத்தகைய இயக்கம் முற்றும் தடை பெறு தனியிசை இயக்கம் (Critically damped harmonic motion) எனப்படும்.

கணக்கு 2

மேற்கணக்கில் துகளின் திணிவு 5 அலகுகள்; முதலில் செயல்படும் விசை O வை நோக்கி 40 x ; அத்துடன் வேகத்தைப் போல் 20 மடங்கு என்றால், இயக்கத்தை ஆராய்க.

$$\left[t = 0 \text{ எனும் போதும் } x = 20 \quad \frac{dx}{dt} = 0 \right]$$

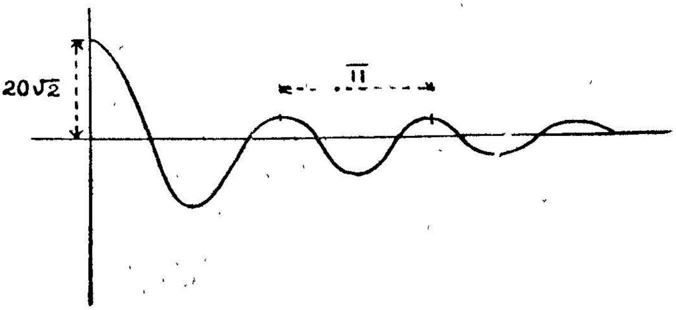
இயக்கச் சமன்பாடு $5 \frac{d^2x}{dt^2} = -40x - 20 \frac{dx}{dt}$ ஆகும்.

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 0$$

இதன் தீர்வு $x = e^{-2t}(20 \cos 2t + 20 \sin 2t)$

$$x = 20\, e^{-2t} (\cos 2t + \sin 2t)$$

$$x = 20\sqrt{2}\, e^{-2t} \cos \left(2t \frac{\pi}{4}\right)$$



படம் 81.

இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்து காண்பது :

(i) வீச்சம் $= 20\sqrt{2}\, e^{-2t}$

(ii) அலைவு காலம் $= \frac{2\pi}{2} = \pi$ (வினாடி)

(iii) அலைவு (Vibration) $= \frac{1}{\pi}$ (வினாடிக்கு)

(iv) (t, x) தொடர்பைக் காட்டும் படம்

இந்த இயக்கத்தில் அலைவுகள் உள்ளன. ஆனால், வீச்சம் தொடர்ந்து குறைந்து கொண்டு வருவதைக் காண்கிறோம். முடிவில் துகள் ஆதியில் வந்து சமநிலையில் அமையும்.

தடைபெறும் தனி இசை இயக்கம் : பொது ஆராய்ச்சி :

தனி இசை இயக்கத்தில் இயங்கும் துகளுக்குத் தடையாக அதன் மேல் m மடங்கு வேக அளவுள்ள எதிர் விசை அதன் இயக்கத்திற்குத் தடையானால் இயக்கத்தை ஆராய்வோம்.

தனி இசை இயக்கத்தின் அலைவு காலம் $\frac{2\pi}{n}$ ஆகுக. அப்போது தனி இசை இயக்கச் சமன்பாடு

$\ddot{x} = -n^2 x$ ஆகும்.

இத்துடன் mk மடங்கு (m துகளின் திணிவு) திசை வேக அளவு தடை விசை செயல்பட்டால் சமன்பாடு

$m\ddot{x} = -mn^2 x - mk\dot{x}$ ஆகும்

$$\therefore \quad \ddot{x} + k\dot{x} + n^2 x = 0$$

இதன் பொதுத் தீர்வு.

$$x = A\, e^{\lambda_1 t} + B\, e^{\lambda_2 t}$$

இங்கு λ_1, λ_2 என்பவை $\lambda^2 + k\lambda + n^2 = 0$ எனும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$$\lambda_1 = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k^2}{4} - n^2} \qquad \left(\frac{k^2}{4} > n^2\right)$$

$t = 0$ எனும்போது $x = A + B$

இரு மூலங்களும் எதிரெண்களாகும் (negative).

[ஏனெனில் இரண்டின் பெருக்குத் தொகை $= n^2$ நேரெண், கூடுதல் எதிரெண். இரண்டும் ஒரே குறியுடையவையாதலின்.

இரண்டும்எதிரெண்ணலும்; $\frac{k^2}{4} > n^2$ என்பதாலும் இதை அறிய லாம்]

$\therefore \quad t \to \infty$ ஆகும்போது $x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$ ஆத லால்

$$x \to 0 \quad [A e^{-\infty} \lambda \; B e^{-\infty} \text{ ஆதலால்}]$$

ஆகவே துகள் 0-வை நெருங்கிக்கொண்டே வருகிறது. ஆனால், அடைவதில்லை. அலைவுகளில்லா இயக்கமாகும்.

இத்தகைய தனி இசையியக்கம் தடைபடுவது, "மிகுந்த தடை பெறு தனி யிசை யியக்கம்'' (Over damped S.H.M). எனப்படும்.

(ii) $\frac{k^2}{4} = n^2$ என்றால் தீர்வு $x = e^{-\frac{k}{2}t}(A + Bt)$ ஆகும்.

இங்கும் மேற்கூறியது போன்று அலைவு இல்லை. கணக்கு 1 காண்க. அதன் படத்தையும் காண்க.

(iii) $\frac{k^2}{4} < n^2$

இப்போது $\lambda^2 + \lambda \lambda + n^2 = 0$ எனும் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் கற்பனை எண்கள்.

$$\lambda_1 = -\frac{k}{2} + i\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}} = -\frac{k}{2} + iq.$$

$$\lambda_2 = -\frac{k}{2} - i\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}} = -\frac{k}{2} - iq.$$

$$\left(q^2 = n^2 - \frac{k^2}{4}\right)$$

பொதுத் தீர்வு $x = A e^{-\frac{k}{2}t} \cos(qt + B)$

$\text{Cos}(qt + B)$ எனும் குணகத்தால் x-ன் மதிப்பு 0-ன் இரு புறமும் அலையும். ஆனால், அலைவு குறைந்து கொண்டே வரும்

என்பதை $e^{-\frac{k}{2}t}$ எனும் குணகம் காட்டுகிறது. கணக்கு 2 ஐப் பார்க்கவும். படம் அது போன்று அமையும் அலைவு காலம் $\frac{2\pi}{q}$ என்பதைக் காணலாம்.

விசைமிகு தனி இசை இயக்கம் (Forced vibrations)

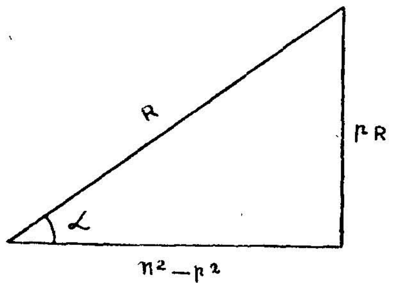
கீழ்வரும் இயக்கச் சமன்பாட்டை ஆராய்வோம்.

$\ddot{x} + k\dot{x} + n^2 x = f \cos pt$

இதுவரை நாம் கண்ட தடையுறு தனியிசை இயக்கத்தில் செயல்படும் விசையுடன் இங்கு $mf \cos pt$ எனும் விசையும் மிகுந்துள்ளது. இங்குள்ள மிகுவிசை $\frac{2\pi}{p}$ காலத்தில் ஒரே அளவுள்ளதாக மாறி மாறி வருகிறது. $\left(\text{Periodic applied force with period } \frac{2\pi}{p}\right)$

(i) $k^2 > 4n^2$ எனும்போதும், $k^2 = 4n^2$ எனும்போதும் அலைவுகள் இல்லை என எளிதில் காணலாம். ஆகவே $k^2 < 4n^2$ எனும் போதுள்ள இயக்கமே ஆராயத் தகுந்தது.

இதன் தீர்வு:



படம் 82.

$$x = a e^{-\frac{k}{2}t} \operatorname{Cos}(qt + \varepsilon) + \frac{f}{k} \cos (pt - \alpha)$$

என்பதைக் காணலாம்.

இதில் a, ε என்பவை புறப்படு நியதிகளிலிருந்து (Initial Conditions) காண வேண்டிய பொது எண்கள். 'k' 'α' என்பவற்றின் தொடர்பை முன் பக்கமுள்ள செங்கோண முக்கோணம் தருகிறது

k, α என்பவை புறப்படு நியதிகளைச் சார்ந்தவை அல்ல.

தீர்வு தரும் செய்திகள்

இங்கு இரு விசை அலைவு இயக்கங்கள் ஒன்றுடன் ஒன்று பொருந்திய கூட்டு இயக்கம் என்பதைக் காணலாம். இது தீர்வின் இரண்டு உறுப்புகளிலும் கோண விகிதச் சார்பலன்கள் (Trigonometric functions) வருவதிலிருந்து காணலாம். $f = 0$ எனின், அலைவு தடையுறு தனியிசை இயக்கமாகும். (Damped Harmonic Oscillator), $k = 0$ என்றால் விசை மிகு தனி இசை இயக்கமாகும். தீர்வின் முதல் உறுப்பு தனி உறுப்பு (free term) எனப்படும். இரண்டாவது உறுப்பு மிகு உறுப்பு (forced term) எனப்படும்.

(ii) தனி உறுப்பு தரும் இயக்கம், காலம் செல்லச் செல்ல, வீச்சம் குறைந்து இல்லாமலேயே ஆகிவிடும். அது தரும் இயக்கம் அழியக் கூடியது (Transient) நிலையற்றது. ஆனால், இரண்டாவது உறுப்பு தரும் இயக்கம் நிலைபெற்றது (steady).

$$\text{இதன் வீச்சம்} = \frac{f}{k} = \frac{f}{\sqrt{(n^2-p^2)^2 + k^2 p^2}}.$$

ஆகவே t-ன் சார்பலன் அல்ல.

$$\tan \alpha = \frac{kp}{n^2 - p^2}$$

வீச்சம் $\frac{f}{k}$ ஆனதால் அதன் அதிக பட்ச மதிப்பு வர k மிகக் குறைவாக இருக்க வேண்டும்.

$$k^2 = (n^2 - p^2)^2 + (pk)^2$$

$$\frac{d(k^2)}{dp} = -4p\,(n^2 - p^2) + 2p\,k^2$$

$$= 4\,p\left(\frac{k^2}{2} - n^2 + p^2\right).$$

$$\frac{d^2 k^2}{dp^2} = 4\left(\frac{k^2}{2} - n^2 + p^2\right) + 8p^2$$

p எனும் எண் நேரெண்ணாகும். ஆகவே $p = \sqrt{n^2 - \frac{k^2}{2}}$ ஆகும்போது k-இன் குறைந்த பட்ச மதிப்பு $k\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}}$ என வருகிறது.

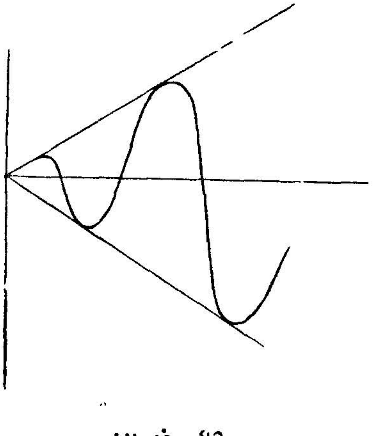
n உடன் ஒத்துப் பார்க்கும்போது k மிகச் சிறிதானால் p ஏறக் குறைய n ஆக இருக்கும்போது அதிக பட்ச வீச்சம் $\frac{f}{kn}$ என வருகிறது.

குறிப்பு :

$p = n$ எனவும் $k = 0$ ஆனால் சான்பாடு

$\ddot{x} + n^2 x = f \cos nt$.

இதன் தீர்வு : $x = a \cos(wt + \epsilon) + \frac{f}{2n} t \sin nt$ இரண்டாவது உறுப்பு t அதிகமாகும்போது இதுவும் அதிகமாகிக் கொண்டே



படம் 83.

வரும். வீச்சம் தொடர்ந்து அதிகமாகும். இதன் வரைப்படம் மேலே காட்டப்பட்டுள்ளது.

3. *மைய விசைகள், மைய ஒழுக்குகள்
(CENTRAL FORCES, CENTRAL ORBITS)

ஒரு துகளின்மேல் செயல்படும் விசையின் திசை எப்போதும்

(i) ஒரு நிலைப்புள்ளி O வை நோக்கியோ அல்லது எதிர்த் திசையிலோ ஆக இருந்து,

(ii) அதன் அளவு O-விலிருந்துள்ள தூரத்தின் சார்பலனாக மட்டும் இருந்தால், அத்தகைய விசை மைய விசை (Central force) எனப்படும். O என்பது விசை மையம் (Centre of force) எனப்படும்.

குறியீட்டில் கூற, O-வை ஆதியாகக் கொள்ள துகளின் நிலை வெக்டர் $\bar{r}$ ஆகுக. செயல்படும் விசை $\bar{F}$ ஆகுக.

$\bar{F} = \frac{f(r)\,\bar{r}}{r}$ எனின் $\bar{F}$ மைய விசையாகும். $\left[\frac{\bar{r}}{r}\right.$ என்பது அலகு வெக்டராகும். $\left.\right]$

O-வை நோக்கி விசை அமைந்தால், ஈர்ப்பு விசையெனவும், எதிர்த்திசையானால் தள்ளுவிசை (Repellent force) எனவும் வழங்கப்படும்.

இத்தகைய விசையால் செயல்பட்டு இயங்கும் துகளின் பாதை அதன் மைய ஒழுக்கு (Central orbit) எனப்படும்.

---

* இதைப்பற்றி விரிவாகத் தமிழ்நாட்டுப்பாடநூல் நிறுவனம் பதிப்பித்துள்ள இயக்கவியல்—வரிசை எண் 265-ல் காண்க.

மைய ஒழுக்கின் சில பொது இயல்புகளைக் கீழே கூறுவோம்.

(i) மைய ஒழுக்கு சமதளத்தில் அமையும் வரையாகும்.

(ii) விசை மையத்தைச்சுற்றிய சுழலுந்தம் (Angular momentum) நிலையானது.

(iii) விசை மையத்தையும் துகளையும் சேர்க்கும் கோடு சம நேரங்களில் சமபரப்புகளைக் கடக்கும் அதாவது பரப்பு வேகம் (areal velocity) சீரானது.

இவற்றின் நிரூபணம்

(i) $\bar{F} = \dfrac{f(r)\,\bar{r}}{r_1}$ என்பது மைய விசை

$$\therefore \quad \bar{r} \times \bar{F} = 0$$

$$\therefore \quad \bar{r} \times \frac{d\bar{v}}{dt} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{v}) = 0$$

$$\therefore \quad \bar{r} \times \bar{v} = \bar{h}$$ ($\bar{h}$ என்பது மாறு வெக்டர்)

அல்லாமலும் $\bar{r} \cdot \bar{r} \times \bar{v} = 0 \quad \therefore \quad \bar{r} \cdot \bar{h} = 0 \quad \therefore \quad \bar{r} \perp^{r} \bar{h}$

$\bar{h}$ என்பது மாறு வெக்டரானதால், $\bar{r}$ ன் நிலை $\bar{h}$-க்குக் குத்தான தளத்தில் அதாவது சமதளத்தில் அமையும்.

ஆகவே மைய விசையால் செயல்பட்டு இயங்கும் துகளின் பாதை ஒரு சமதளத்தில் இருக்கும் [இதை xy தளம் எனவும் O வை ஆதியாகவும் கொண்டு இயக்கத்தை ஆராயலாம்.]

(ii) $\bar{r} \times \bar{v} = \bar{h}$ மாறு வெக்டரென்று கண்டோம். சுழலுந்தம் $\bar{r} \times m\bar{v} = m\bar{h}$. ஆகையால் சுழலுந்தம் மாறுதது.

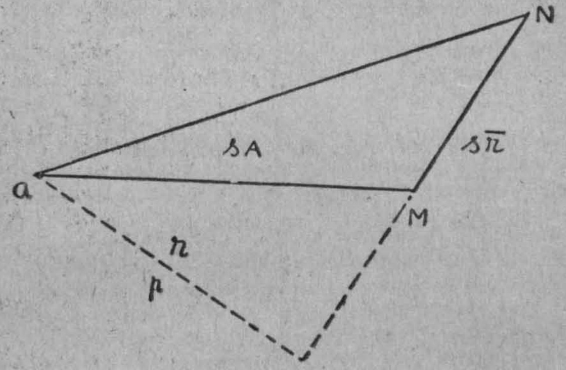
(iii) $$\bar{v} = \mathop{Lt}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

Δt நேரத்தில் துகளைச்சேர்க்கும் கோடு ΔA பரப்பைக் கடந்தால் $\Delta A = \dfrac{1}{2}\left| \bar{r} \times \Delta \bar{r} \right|$

$$\therefore \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left| \bar{r} \times \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2}\left| \bar{r} \times \dot{\bar{r}} \right| = \frac{1}{2}\left| \bar{h} \right|$$

$$\Delta t \to 0$$

ஆகவே பரப்புவேகம் சீரானது.



படம் 84.

மாற்றுவழி

$\bar{v} = \dot{r}\,\bar{r}_1 + r\,\dot{\theta}\,\bar{\theta}_1$

[$\bar{r}_1$ என்பது $\bar{OP}$ திசையில் அலகு வெக்டர்; $\bar{\theta}_1$ என்பது அதற்குக் குத்துதிசையில் அலகு வெக்டர்.]

$\therefore \quad \bar{r} \times \bar{v} = r^2\,\dot{\theta}\,\bar{k}$ ($\bar{k}$ என்பது தளத்திற்குக் குத்தான அலகு வெக்டர்)

$\therefore \quad h = r^2\,\dot{\theta}\,\bar{k}$

$\therefore \quad r^2\dot{\theta} = |\bar{h}|$

ஆனால் $r^2\dot{\theta} = 2\dfrac{dA}{at}$

$\therefore$ பரப்புவேகம் சீரானது.

குறிப்பு: துகள் செல்லும் திசைக்கு—அதாவது தொடுகோட்டிற்கு—O-விலிருந்துள்ள குத்துக்கோட்டின் நீளம் ρ ஆகுக.

அப்போது OMN என்பதன் பரப்பு $\frac{1}{2}\rho \times MN$

$$\therefore \Delta A = \frac{1}{2} \rho \times \Delta r$$

$$\therefore \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho \times \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$\therefore \Delta t \to 0 \text{ ஆகும்போது} = \frac{1}{2} = \rho v = \frac{1}{2} h$$

$$\therefore h = \rho v \text{ அதாவது } \rho v \text{ நிலையானது.}$$

மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு (Equation of Central Orbit)

துகளின் திணிவு m ஆகுக. விசை மையம் O-வை ஆதியாகக் கொண்டு, கோணதூர உறுப்புகளில் நாம் ஏற்கெனவே கண்டுள்ள முடுக்கத்தைப் பயன்படுத்த வரும் இயக்கச் சமன்பாடு

$$m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - r\dot{\theta}^2 \right\} = f(r) \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0$$

[ஏனெனில், விசை O-விலிருந்து துகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் திசையில், தூரத்தின் சார்பலனுகவுள்ளது.]

$$\therefore r^2 \dot{\theta} = h \text{ (நிலை எண்).}$$

$$\therefore \dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$$

$$\therefore m \left\{ \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} \right\} = f(r) \qquad \ldots\ldots (2)$$

$r = \frac{1}{u}$ எனப் பிரதியிடவும். $\therefore \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$

$$\therefore \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-h \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \quad \ddot{r} - = h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

∴ சமன்பாடு (2)-லிருந்து

$$m\left\{ -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} h^2 u^3 \right\} = f\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{mh^2 u^2}$$

$f\left(\frac{1}{u}\right)$ என்பது O-வை நோக்கிய விசை என்போம்.

அலகுத் திணிவுள்ள துகளின்மேல் செயல்படும் விசை P என்றால் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2 u^2}$$ என ஆகிறது.

மைய விசைக்களம் ஆற்றல் காப்பு விசைக்களமாகும் (Central force field is conservative)

இதை நிறுவி, அவ்வாறெனில் துகளின் நிலை ஆற்றல் (Potential Energy) என்ன என்பதைக் காண்போம்.

நிலை ஆற்றல் உள்ளதெனில் அது V ஆகுக.

மைய விசை $\bar{F}$ ஆகுக.

$$\therefore \quad \bar{F}\, d\bar{r} = -dV$$

$$\therefore \quad f(r)\, \bar{r}, \cdot d\bar{r} = -dV$$

$$\therefore \quad J\frac{(r)\, \bar{r} \cdot d\bar{r}}{\bar{r}} = -dv$$ ஆனால் $\bar{r} \cdot d\bar{r} = r\, dr$

$$\therefore \quad f(r)\, dr = -dv$$

$$\therefore \quad V = -\int f(r)\, dr$$

ஆகவே இத்தகைய நுண் தொகை காண இயலும்.

$\therefore$ V உள்ளது. ஆகவே நிலையாற்றல் $-\int_{r}^{r_0} f(r)\,dr$

ஆதலால், மைய விசைக்களம் ஆற்றல் காப்பு விசைக் களமாகும்.

[மாற்று வழி :

$\nabla \times \bar{F} = 0$ என நேரடியாக நிறுவி $\bar{F}$ எனும் மைய விசை ஆற்றல் காப்பு விசை எனவும் காட்டலாம்]

குறிப்பு: இயங்கும் துகளின் திசை வேக உறுப்புகள்

OP திசையில் $\dot{r}$; அதற்குக் குத்தாக $r\dot{\theta}$.

$\therefore$ இங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$

நிலை ஆற்றல் $= -\int f(r)\,dr$

$\therefore$ ஆற்றல் காப்பு விதிப்படி ஆற்றல் சமன்பாடு

$$\frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - 2\int f(r)\,dr = 2E$$

மைய ஒழுக்கின் சமன்பாடு (மற்றொரு உருவம்)

ஆற்றல் காப்புச் சமன்பாட்டால் வருவது

$$\frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] - \int f(r)\,dr = E;\quad r^2\dot{\theta} = h.$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \frac{m}{2}\left[\frac{h^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{r^2h^2}{r^4}\right] - \int f(r)\,dr = E$$

$$\therefore \frac{mh^2}{2r^4}\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right\} - \int f(r)\,dr = E$$

குறிப்பு :

$u = \frac{1}{r}$ எனப் பிரதியிட்டால் வருவது. திசைவேக அளவு v ஆகுக.

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

$$= h^2 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{u^2}\right)(hu^2)^2$$

$$v^2 = h^2 \left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$$

$$\therefore \frac{1}{2} mv^2 = E - V$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{2(E-V)}{mh^2}$$

கவியங்களும் கவியக்கோணங்களும் (Apsides and apsidal angles)

மைய விசையால் இயக்கப்படும் துகளின் இயக்கப்பாதையில், விசை மையத்திலிருந்து 'மீப்பெரிய', 'மீச்சிறிய' தூரத்திலுள்ள நிலைகள் கவியங்கள் எனப்படும்.

விசை மையத்திலிருந்து கவியங்களுக்கு உள்ள திசை, அங்கு துகளின் வேகத் திசைக்குக் குத்தாகும்.

ஏனெனில், மைய ஒழுக்கில் துகளின் நிலை P ஆகுக. P-ல் பாதைக்குள்ள தொடுவரைக்கு, $\triangle$-விலிருந்துள்ள குத்துக்கோடு 'p' ஆகுக.

அப்போது $\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$.

$\left(OP = r = \frac{1}{u}\right)$. r என்பது மீப்பெரிய, மீச்சிறிய மதிப்புடையதெனின் u என்பது மீச்சிறிய, மீப்பெரிய மதிப்புடையாதாகும், $\therefore \frac{du}{d\theta} = 0$

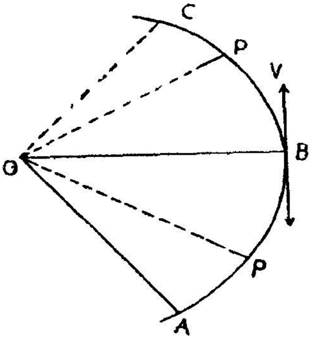
$$\therefore \quad \frac{1}{p^2} = u^2 = \frac{1}{r^2} \qquad \therefore \; p = r$$

∴ கவியத்துக்குள்ள தூரம், துகள் இயங்கும் திசைக்குக் குத்தாகும்.

மைய விசை தூரத்தின் ஒரே மதிப்புடைய சார்பானல்

(i) மைய ஒழுக்கில் இரண்டிற்கு மேற்படாத கவியங்கள் உள்ளன.

(ii) கவிய தூரங்களின் இருபுறமும் ஒன்று போலப் பாதை அமையும்.



படம் 85.

O என்பது விசை மையமாகுக. *A,B,C* என்பவை, அடுத்தடுத்த மூன்று கவியங்கள் என்போம். *V* என்பது துகளின் திசை வேகம்; *B* எனும் கவியத்தில் என்போம்.

V-ன் திசை மட்டும் *B*-ல் எதிராக மாற்றினல், *BPA*, எனும் பாதையில் இயங்கும். முடுக்கம் துகளின் தூரத்தை மட்டும் சார்ந்திருப்பதால், மைய ஒழுக்கப்பாதையின் சமன்பாட்டிலிருந்து *BC* எனும் பாதையும், *BA* எனும் பாதையும் ஒரே வடிவுடையது எனக் காணலாம்.

∴ $OA = OC$. இதேபோல *C*-க்கு அடுத்த கவியம் *D* ஆனல், $OB = OD$ ஆகும். ஆகவே, இரண்டே இரண்டு கவிய தூரங்கள் மட்டுமே உள்ளன. கவிய தூரங்களுக்கு இருபுறமும் பாதை ஒன்று போல அமையும்.

இரண்டு அடுத்தடுத்த கவிய நிலைகள் விசை மையத்தில் தாங்கும் கோணம், கவியக்கோணம் (Apsidal angle) எனப்படும்.

கணக்கு 1

ஒரு துகள் μr^{-7} எனும் மைய முடுக்கத்துடன் இயங்குகிறது. அது a தூரத்தில் அமைந்துள்ள ஒரு கவிய நிலையிலிருந்து புறப் படுகிறது. புறப்படுவேகம், கந்தழிப் புள்ளியிலிருந்து நேர் கோட்டில் வந்தால் என்ன வேகமோ, அந்த வேகத்திற்குச் சமம் என்றால், பாதையின் சமன்பாடு $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ எனக்காட்டு.

தீர்வு

பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{p^2 u^2} \quad P = \mu u^7$$

$$\therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^5}{p^2}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{\mu u^6}{3h^2} + A$$

ஆனால் $h = pv = p_0 v_0$

கவியப்புள்ளியில் $p_0 = a$

$$\frac{v_0^2}{2} = -\int_{\infty}^{a} P\, dr.$$

$$= -\int_{\infty}^{a} \frac{\mu}{r^7}\, dr = \frac{\mu}{6a^6}$$

$$\therefore v_0^2 = \frac{\mu}{3a^6} \quad \therefore h^2 = a^2 v_0^2 = \frac{a^2 \mu}{3a^6}$$

$$= \frac{\mu}{3a^4}$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = a^4 u^6 + A.$$

புறப்படும்போது கவியப்புள்ளியானதால் $\left(\frac{du}{d\theta}\right) = 0;\ u = \frac{1}{a}$

$$\therefore \frac{1}{a^2} = \frac{a^4}{a^6} + A \qquad \therefore A = 0$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = a^4 u^6$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = u^2 (a^4 u^4 - 1)$$

$$\therefore \frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{r}\sqrt{\left(\frac{a^4}{r^4} - 1\right)}$$

$$\therefore \frac{-V\,dr}{\sqrt{a^4 - r^4}} = d\theta$$

$$\therefore \cos^{-1}\frac{r^2}{a^2} = 2\theta + 2B$$

ஆனால் $r = a$ எனும் போது $\theta = 0 \quad \therefore \quad B = 0$

$$\therefore r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

கணக்கு 2

ஒரு துகளின் மையமுடுக்கம் μu^5. அது a தூரத்தில் உள்ள கவியப்புள்ளியில் இருந்து ஏவப்படுகிறது. அதன் திசைவேகம் அதே அளவு ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் உள்ள திசை வேகத்தின் 5 மடங்கு எனின், இன்னொரு கவிய தூரத்தைக் காண்க.

தீர்வு

பாதையின் வகைக்கெழுச்சமன்பாடு

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu u^3}{h^2}$$

துகளின் புறப்படு திசைவேகம் v_0 ஆகுக. a ஆரமுள்ள வட்டப்பாதையில் திசைவேக அளவு V எனின்,

$$\frac{V^2}{a} = \frac{\mu}{a^5} \qquad \therefore V^2 = \frac{\mu}{a^4}$$

ஆனல் $V_0 = 5V \therefore V_0^2 = 25V^2 = \frac{25\mu}{a^4}$

வட்டப்பாதையில் நிலையியக்கம் (Stable motion in circular orbit) :

மைய ஒழுக்குப் பாதையின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு

$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}$ என்று கண்டோம். பாதை வட்டமானல் u என்பது மாறுது. ஆகவே $\frac{d^2u}{d\theta^2} = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad u = \frac{P}{h^2u^2}$ எனச் சமன்பாடு வருகிறது.

ஆகவே ஒரு துகள், விசைமையத்துடன் அதன் நிலையைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்குக் குத்தாகவும் $h^2 = \frac{P}{u^3}$ எனும் படியான புறப்படு வேகத்துடனும் இயங்கத் தொடங்கினுல், அது வட்டப் பாதையில் இயங்கும்.

ஆனல் இவ்வாறு இயங்கும்போது சற்றே இடர் ஏற்பட்டால் (slight disturbances), வட்டப்பாதையை ஒட்டி இயங்குமா? அல்லது வட்டப்பாதையை விட்டு அறவே நீங்குமா ? என்பது கேள்வி. வட்டப்பாதையை ஒட்டி இயங்கினுல், நிலைபெற்ற வட்ட இயக்கப்பாதை எனப்பெயர் பெறும். இதை ஆராய்வோம்.

வட்டப்பாதையில் $u = u_0 \quad h = h_0$ ஆகுக.

$$\therefore \quad h_0^2 = \frac{P}{u_0^3}$$

சற்றே விலக்கமேற்படின் $u = u_0 + x$ ஆகுக. இங்கு x-ம் அதன் வகைக் கெழுக்களும் மிக நுண்ணியவை. $h - h_0$ என்பதும் நுண்ணிதெனக் கொள்வோம். மைய ஒழுக்குப் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் $u = u_0 + x$ எனப்பிரதியிட

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + u_0 + x = \frac{P}{h^2(u_0 + x)^2}$$

[$P(u)$ என்பது u-ன் சார்பலனுன விசை எனக் கொள்வேம்.]

$$\frac{P}{h^2(u_0 + x)^2} = \frac{1}{h^2u_0^2}\left(1 + \frac{x}{u_0}\right)^{-2}[P_0 + xP_0' + \cdots]$$

[இங்கு P_0 என்பது $P(u_0)$ ஆகும். P_0' என்பது P-ன் u வைச் சார்ந்த வகைக் கெழு கண்டு u-க்கு u_0 எனப்பிரதியிட வருவது.]

$$\therefore \quad \frac{P}{h^2(u_0+x)^2} = \frac{P_0}{h^2 u_0^2}\left[1 + x\left(\frac{P_0'}{P_0} - \frac{2}{u_0}\right) + \cdots\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{d\theta} + A = B$$

$$\left[\text{இங்கு } A = 1 - \frac{P_0}{h_0^2 u_0^2}\left(\frac{P_0'}{P_0} - \frac{2}{u_0}\right)\right.$$

$$\left. = 3 - \frac{u_0 P_0'}{P_0}; \quad B \text{ இன்னொரு நிலை எண்.}\right]$$

$A > 0$, அல்லது $A < 0$ அல்லது $A = 0$ என்பதற்கேற்ப

இதன் தீர்வு $x = \frac{B}{A} + C_1 \cos(\sqrt{A}\,\theta) + C_2 \sin(\sqrt{A}\,\theta)$

அல்லது $x = \frac{B}{A} + C_1 \cos h\sqrt{-A}\,\theta + C_2 \sin h(\sqrt{-A}\theta)$

அல்லது $x = \frac{B\theta^2}{2} + C_1\theta + C_2$

இதில் முதல் தீர்வில் மட்டுமே x நுண்ணியதாக இருக்கும்.

$\therefore$ $\frac{1}{u_0}$ எனும் ஆரமுடைய வட்டப்பாதையியக்கம் நிலை பெற்ற இயக்கமாக இருக்க வேண்டுமெனில் $\frac{u_0 P_0'}{P_0} < 3$ ஆக வேண்டும்.

குறிப்பாக, $P = \frac{k}{r^n} = k\,u^n$ என்றால் $\frac{u P'}{P} = n$

$\therefore$ இங்கு $n < 3$ எனின், இயக்கம் நிலை பெற்றதாகும். $\frac{k}{r}$ என்றாலும் $\frac{k}{r^2}$ என்றாலும் வட்ட இயக்கம் நிலை பெற்றது. $\frac{k}{r^3}$ என்று சற்றே இடர் ஏற்படின் வட்டப்பாதை யியக்கம் மறையும்.

4. விறை பொருள் இயக்கவியல்

(DYNAMICS OF A RIGID PARTICLE)

4-1. திணிவு மையம்

n துகள் கொண்ட தொகுதியைக் கொள்வோம். அவற்றுள் i th துகளின் நிலைவெக்டர் $\bar{r}_i$ ஆகுக. ஆகவே அதன் திசை வேகம் $\frac{d}{dt}\bar{r}_i$ அல்லது $\dot{\bar{r}}_i$ அல்லது $\bar{v}_i$ அதன் முடுக்கம் $\frac{d^2}{dt^2}\bar{r}_i$ அல்லது $\ddot{\bar{r}}_i$. துகள் தொகுதியின் மொத்தத் திணிவு $\Sigma m_i = M$ ஆகுக. அப்போது $\bar{k}$ எனும் நிலைவெக்டருடைய புள்ளி $M\bar{k} = \Sigma m_i \bar{r}_i$ எனும் சமன்பாட்டுக்கிணங்கியிருக்குமானால், இந்தப் புள்ளி, துகள் தொகுதியின் திணிவு மையம் (Centre of mass—C.M.) எனப்படும்.

ஆகவே, திணிவு மையத்தின் திசைவேகம் $\bar{V} = \dot{\bar{k}}$

திணிவு மையத்தின் முடுக்கம் $= \dot{V}$ அல்லது $\ddot{\bar{k}}$

∴ கீழ்வரும் சமன்பாடுகளைக் காண்கிறோம்

$$\left.\begin{array}{l} M\dot{\bar{k}} \text{ அல்லது } M\bar{V} = \Sigma m_i \dot{\bar{r}}_i \text{ அல்லது } \Sigma m_i \bar{V}_i \\ M\ddot{\bar{k}} \text{ அல்லது } M\dot{\bar{V}} = \Sigma m_i \ddot{\bar{r}}_i \text{ அல்லது } \Sigma m_i \dot{\bar{V}}_i \end{array}\right\} \quad \text{......(1)}$$

குறிப்பு: O எனும் ஆதியே திணிவு மையமானால் $\bar{k} = 0$ ஆகும். அப்போது $\Sigma m_i \bar{r}_i = 0$ ஆகும்.

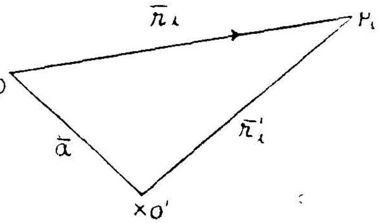
4-2. திணிவு மையத்தின் நிலை, ஆதியைச்சார்ந்ததல்ல

இன்னோர் ஆதி O' ஐக் கொள்வோம். O' ஐச் சார்ந்த i th துகளின் நிலை வெக்டர் $\bar{r}'$ ஆகுக.

$\overline{OO'} = a$ ஆகுக.

$\therefore \quad \bar{r}_i = \bar{a} + \bar{r}'_i$

$\therefore \quad \Sigma m_i \bar{r}_i = \Sigma m_i \bar{a} + \Sigma m_i \bar{r}_i'$



படம் 86.

O' ஐச் சார்ந்த திணிவு மையத்தின் நிலை வெக்டர் $\bar{k}'$ ஆகுக. இது G' எனும் புள்ளியைக் குறிக்கட்டும்.

O ஐச் சார்ந்த திணிவு மையத்தின் நிலைவெக்டர் $\bar{k}$ ஆகுக. இது G எனும் புள்ளியைக் குறிக்கட்டும்

$\therefore \quad M\bar{k} = \Sigma m_i \bar{r}_i \qquad M\bar{k}' = \Sigma m_i \bar{r}_i'$

ஆனால் $M\bar{k} = \Sigma m_i \bar{r}_i$

$= \Sigma m_i (\bar{a} + \bar{r}_i')$

$= \Sigma m_i \bar{a} + \Sigma m_i \bar{r}_i'$

$= M\bar{a} + M\bar{k}'$

$= M(\bar{a} + \bar{k}')$

$\bar{k} = \bar{a} + \bar{k}'$

$\overline{OG} = \overline{OO'} + \overline{O'G'} = \overline{OG'}$

$\therefore$ G எனும் புள்ளியும் G' எனும் புள்ளியும் ஒன்றே.

ஆகவே, ஒரு துகள் தொகுதியின் திணிவு மையம் துகள்களின் நிலையையும் திணிவையும் பொறுத்ததேயன்றி ஆதியைப் பொறுத்ததல்ல.

4-3. தொடர்ந்து பரவியுள்ள துகள் தொகுதி (Continuous distribution of matter)

இங்கு துகள் தொகுதியின் செறிவு (density) ρ ஆகுக. இங்கு துகள்களை எண்ணமுடியாததலால், நுண் கொள்ளளவு dv ஆகுக. இதில் உள்ள திணிவு $\rho\, dv = dm$ ஆகுக. நுண் திணிவுகளை ஒன்று சேர்க்க $\int$ எனும் நுண் தொகைக் குறியீட்டைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

$$\therefore \quad M = \int dm \,; \qquad M\bar{k} = \int \bar{r}\, dm$$

இங்கு $\bar{r}$ என்பது dm—ன் நிலை வெக்டராகும். அதேபோல் $M\dot{\bar{k}} = \int \dot{\bar{v}}\, dm \quad M\ddot{\bar{k}} = \int \dot{\bar{v}}\, dm.$

4-4. விறை பொருள் பிணைப்பு; அல்லது விறைப் பிணைப்புத் துகள் தொகுதி (Rigidly Connected Particle)

ஒரு துகள் தொகுதியில், மேல் புற விசைகள் செயல் பட்டாலும் படாவிடினும், அவற்றிடையே உள்ள எந்த இரு துகள்களின் ஒன்றைச் சார்ந்த மற்ற துகளின் நிலை மாறுபடா திருக்கிறதோ, அத்தகைய துகள் தொகுதி, விறைப் பிணைப்புடைத் துகள் தொகுதி (Rigidly connected particle system) எனப்படும். நாம் சாதாரணமாகக் காணும் பொருள்கள் பலவும் இத்தகைய துகள் தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகும். ஒரு பேனவை எடுத்துக் கொள்வோம். அதன் மேல் சாதாரண விசைகள் செயல் படும்போது, அதன் அடிக்கும் நுனிக்கும் உள்ள தூரம் மாறு படாது. அடி ஒரு விதமாக நகர்ந்தால் அதுபோன்று நுனியும் நகரும். ஆனல், பேன உடையும்படியான அளவுக்கு விசையை அதிகரித்தால் விறைப் பிணைப்பு நீங்குகிறது. துகள் தொகுதியில் எண்ணக்கூடிய அளவுக்குத் துகள்கள் இருக்கலாம். அல்லது கணக்கிலாது துகள்கள் தொடர்ந்து பரவலாக அமையலாம்.

N துகள்கள் உள்ள இத்தகைய துகள் தொகுதியில் i th துகள் d-ன் நிலைவெக்டர் (O எனும் ஆதிக்கு) $\bar{r}_i$ ஆகுக. j th துகளின் நிலை வெக்டர் $\bar{r}_j$ ஆகுக.

இரண்டிற்கு மிடையே தூரம் மாறுவதில்லை யாகையால்

$$|\bar{r}_j - \bar{r}_i| = \text{நிலை எண்ணுகும்.} \qquad \cdots \quad (1)$$

i th துகளினால் j th துகளின் மேல் ஏற்படும் உள்ளுறு விசை $\bar{F}_{ji}$ ஆகுக. அதேபோல j th துகளினால் i th துகளின் மேல் ஏற்படும் உள்ளுறு விசை $\bar{F}_{ij}$ ஆகுக. அப்போது $\bar{F}_{ji} + \bar{F}_{ij} = 0$ ... (2)

விறை பொருள் இயக்க அடிப்படைச் சமன்பாடுகள் காணும் போது இவ்விரண்டு சமன்பாடுகளை அடிக்கடிப் பயன்படுத்த வேண்டிவரும்.

4-5. அடிப்படைச் சமன்பாடுகள்

(*i*) திணிவு மைய இயக்கம்: விறைப் பிணைப்புடைய N துகள்களைக் கொள்வோம். *i th* துகளின் திணிவு m_i ஆகுக. அதன் நிலை வெக்டர் $\bar{r}_i$ ஆகுக. அதன் மேல் செயல்படும் விசை $\bar{F}_{ij}$ ஆகுக இங்கு i என்பதும் j என்பதும் 1-லிருந்து N-வரை மதிப்புப் பெற முடியும். i-ம் j-ம் சமமதிப்புப் பெறும்போது அதாவது $\bar{F}_{ii}$ என்பது *i th* துகளின் மேல் செயல்படும் புறவிசையாகும்.

நியூட்டன் விதிப்படி $d\, m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^{N} \bar{F}_{ij}$

எல்லாத் துகள்களையும் சேர்க்க

$$\sum_{j=1}^{W} m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^{W} \sum_{j=1}^{N} \bar{F}_{ij}$$

ஆனால் $i \neq j$ என்ற போதுள்ள வலப்பக்க உறுப்புகளின் கூடுதல் $= 0$. ஏனெனில் $\bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0$

$$\therefore \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\bar{r}}_i = \sum_{j=1}^{W} \sum_{j=1}^{W} \bar{F}\ (i = j)$$

ஆனால் $\bar{k}$ என்பது திணிவு மையத்தின் நிலை வெக்டரானால்

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\bar{r}}_i = M\, \ddot{\bar{k}} \left(M = \sum_{i=1}^{N} m_i \right)$$

புறவிசையின் வெக்டர் கூடுதல் $\bar{F}$ ஆகுக.

$\therefore \quad M\ddot{\bar{k}} = \bar{F}$ எனக் காண்கிறோம். இவ்வாறு திணிவு மைய இயக்கத்தைத் தரும் சமன்பாடு வருகிறது.

அதாவது விறைப் பிணைப்புடைய துகள் தொகுதியின் திணிவு மையம், அதில் மொத்தத் திணிவுள்ள ஒரு துகள் இருந்து அதன் மேல் புறவிசைகள் யாவும் ஒன்று சேர்ந்து செயல்படின் எவ்வாறு இயங்குமோ அதுபோன்று திணிவு மையம் இயங்கும்.

[இதையே கீழ்வருமாறும் கூறலாம். துகள் தொகுதியும் நேர் உந்த மாறு வீதக் கூடுதல் (Rate of change of total linear momentum) அதன் மேல் செயல்படும் புற விசைகளின் வெக்டர் கூடுதலுக்குச் சமமே ஒழிய, உள்ளுறு விசைகளைப் பொறுத்ததல்ல]

குறிப்பு : $\bar{\lambda}$ எனும் அலகு வெக்டர் திசை $\bar{F} \cdot \bar{r} = 0$ எனும்படி இருக்கட்டும்.

அப்போது $M\ddot{\bar{k}} \cdot \bar{\lambda} = \bar{F} \cdot \bar{\lambda} = 0$

அல்லது $\frac{d}{dt}\left(\Sigma\, m_i\, \dot{\bar{r}}_i\right) \cdot \bar{\lambda} = 0$

$\therefore \quad \left(\Sigma\, m_i\, \dot{\bar{r}}_i\right) \cdot \bar{\lambda} =$ நிலை எண்.

$\therefore \quad \bar{\lambda}$ திசையில் மொத்த நேர் உந்தத்தின் பிரிவு (Component) மாறுபடாது காக்கப்படுகிறது.

அதாவது, ஒரு திசையில் புற விசையின் பிரிவுகளின் கூடுதல் பூச்சியமென்றால், அத்திசையில் நேர் உந்தத்தின் பிரிவு மாறாமல் காக்கப்படுகிறது.

இதை நேர் உந்தக் காப்புக் கொள்கை (Principle of Conservation of linear momentum) என வழங்குகிறோம்.

4-6. விறைப் பிணைப்புடைய துகள் தொகுதியின் சுழலுந்தம் (Moment of Momentum of system of rigidly connected particles)

தொகுதியில் N துகள்கள் உள்ளன என்போம். P_i என்பது *ith* துகள். அதன் நிலை வெக்டர் $\bar{r}_i$ ஆகுக. P_j என்பது *jth* துகள். அதன் நிலை வெக்டர் $\bar{r}_j$. P_j எனும் துகளினால் *ith* துகளின் மேல்

உள்ள விசை $\bar{F}_{ij}$ இது $P_i P_j$ எனும் கோட்டுத் திசையில் செயல் படுகிறது.

$\therefore$ $\bar{r}_i - \bar{r}_j$-இன் திசையும் $\bar{F}_{ij}$-ன் திசையும் ஒன்றே (அல்லது எதிர்.)

$$\therefore \quad (\bar{r}_i - \bar{r}_j) \times \bar{F}_{ij} = 0$$

$$\therefore \quad \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} - \bar{r}_j \times \bar{F}_{ij} = 0$$

ஆனால் $\bar{F}_{ij} = - \bar{F}_{ji}$

$\therefore$ $\bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} + \bar{r}_j \times \bar{F}_{ji} = 0$ எனக் காண்கிறோம். ... (1)

இப்போது,

$$m_i \ddot{\bar{r}} = \sum_j \bar{F}_{ij}$$

$$\therefore \quad m_i \bar{r}_i \times \ddot{\bar{r}}_i = \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij} \quad (i = 1, 2. \; N)$$

(அதாவது N சமன்பாடுகள் இவ்வாறு உள்ளன.)

ஆகவே இரு புறமும் ஒன்று சேர்க்க

$$\Sigma \, m_i \, \bar{r}_i \times \ddot{\bar{r}}_i = \sum_i \sum_j \bar{r}_i \times \bar{F}_{ij}$$

(i) ஆனால் சமன்பாடு (1)-லிருந்து இடப்புறம் $i \neq j$ என வரும் உறுப்புகளின் கூடுதல் பூச்சியமாகும்.

(ii) அன்றியும், $\frac{d}{dt} (\bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i) = \dot{\bar{r}}_i \times \dot{\bar{r}}_i + \bar{r}_i \times \ddot{\bar{r}}_i$

$= r_i \times \ddot{\bar{r}}_i$ ஆனதால்

$$\frac{d}{dt} \{ \sum_i m_i \bar{r}_i \times \dot{\bar{r}}_i \} = \Sigma \, \bar{r}_i \times \bar{F}_i$$

துகள்களின் O-வைச் சார்ந்த சுழலுந்தத்தின் மாறு வீதத்தின் கூடுதல், அவைமேல் செயல்படும் புறவிசைகளின் O-வைச் சார்ந்த திருப்பு திறனுக்கு (அல்லது சுழல் திறன்) சமமாகும்.

சுழலுந்தக் கூடுதலை $\bar{h}_0$ எனவும், மொத்தத் திருப்பு திறனை G_0 எனவும் குறித்தால்.

$\dot{\bar{h}}_0 = G_0$ எனக் காண்கிறேம்.

குறிப்பு 1:

துகள் தொகுதியின் திணிவு மையம் Q வை ஆதியாகக் கொண்டால் மேற்கூறிய சமன்பாடு $\dot{\bar{h}}_Q = G_Q$ எனவாகும்.

4-7. குறிப்பு 2:

ஒரு விறை பொருள் தொகுதியின் மேல் பல விசைகள் செயல்பட்டால், அவற்றை ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி வழிச் செயல்படும் தனி விசை $\bar{F}$ ஒன்றுக்கும், $\bar{G}$ எனும் சுழலிணைக்கும் ஒடுக்கலாம் என நிலையியலில் கண்டோம்.

$\bar{F}$ என்பது புற விசைகளின் வெக்டர் கூடுதலாகும். G எனும் சுழலிணையின், திருப்பு திறன், அவ்விசைகளின், அப்புள்ளியைச் சார்ந்த திருப்பு திறன்களின் வெக்டர் கூடுதலாகும் எனவும் கண்டோம்.

இங்குத் துகள் தொகுதியின் மொத்த நேர் உந்த மாறு வீதம் $\bar{F}$-க்குச் சமம் எனவும், சுழல் உந்த மாறு வீதம் (புள்ளியைச் சார்ந்து) சுழலிணை $\bar{G}$-க்குச் சமம் எனவும் கண்டோம்.

$\bar{h}_P = \bar{h}_0 - \bar{C} \times \bar{P}$ எனக் கண்டோம்.

P என்பதற்கு Q எனப் பிரதியீடு இடவும்.

$\therefore \bar{h}_0 = \bar{h}_Q + \bar{C} \times \bar{P}$

ஆனல் $\bar{P} = \Sigma m_i \bar{r}_i = M\bar{k}_i \quad C = \bar{k}$

$\therefore \bar{h}_0 = \bar{k} \times M\bar{k} + \bar{h}_Q$

ஒரு விறைபொருள் தொகுதி (அது இயங்கும் போது) யின் O எனும் நிலைப்புள்ளியைச் சார்ந்த சுழலுந்தம் = அதன் திணிவு மையத்தைச்சார்ந்த சுழலுந்தமும், மொத்த திணிவுடைய துகள் ஒன்று திணிவு மையத்தில் அமர்ந்து அதனுடன் நகர்ந்தால், அதன் சுழலுந்தம் எதுவோ அதுவும் சேர்ந்ததாகும்.

4-8. குறிப்பு 3:

$\bar{h}_Q$ எனும் சுழலுந்தம், O-வை ஆதியாகக் கொண்டால் துகள்களின் திசைவேகம் என்னவோ அவற்றைக் கொண்டு Q-வைச் சார்ந்த சுழலுந்தம் கணக்கிட வருவதாகும்.

P_i என்பது i th துகளாகுக.

$\bar{O}\bar{P}_i = \bar{r}_i \quad Q\bar{P}_i = \bar{P}_i$ ஆகுக.

$\overline{OQ} = \bar{k}$ ஆகுக.

அப்போது $\overline{OP}_i = \overline{OQ} + \overline{QP}_i$

$$\bar{r}_i = \bar{k} + \bar{P}_i$$

$$\therefore \quad \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{k}} + \dot{\bar{P}}$$

4-9. குறிப்பு 4 :

இங்கு O எனும் ஆதி, நிலைப்புள்ளி என்று திட்டவட்டமாகக் கூறவில்லை. வேறு ஏதேனும் P எனும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொண்டால்,

$\dot{\bar{h}}_P = G_P$ என வருகிறதா என்று பார்ப்போம்.

$o\bar{P} = \bar{C}$ ஆகுக. $\bar{P}\bar{P}_i = \bar{s}_i$ ஆகுக. (P_i துகள்)

$\therefore \quad \bar{C} + s_i = \bar{r}_i$

$\bar{h}_P = \Sigma m_i \bar{S}_i \times \bar{r}_i$

$= \Sigma m_i (\bar{r}_i \bar{C}_i) \times \dot{\bar{r}}_i = \Sigma m_i \bar{r} \times \dot{\bar{r}}_i - C \times \Sigma m_i \dot{\bar{r}}$

[$\bar{P}$ என்பது நேர் உந்தம்]

$= \bar{h}_0 - \bar{C} + P$

$\therefore \quad \dot{\bar{h}}_P = \dot{h} - \dot{\bar{C}} \times \bar{P} - \bar{C} \times \dot{\bar{P}}$

$\bar{G}_P = \Sigma S_i \times \bar{F}_{ij} = \Sigma \bar{r}_i \times F - C \times \Sigma F = G_0 - C \times \dot{P}$

$\therefore \quad \dot{\bar{h}}_P = G_P - \dot{\bar{C}} \times \bar{P}$

$\therefore \quad \dot{\bar{h}}_P = G_P$ ஆக வேண்டுமானால்,

(i) $\dot{\bar{C}} = 0$ ஆகவேண்டும். அதாவது P நிலைப்புள்ளியாக இருக்கவேண்டும்.

அல்லது

(ii) $\dot{\bar{C}} \parallel \bar{P}$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

அதாவது P எனும் புள்ளி, திணிவு மையத்தின் திசை வேகத்துடன் நகரும் புள்ளியாகவும் இருக்கலாம்

4-10. குறிப்பு 5 :

Q என்பது பொருள் தொகுதியின் திணிவு மையமானல் $\bar{h}_0$-க்கும் $\bar{h}_Q$-க்கும் உள்ள தொடர்பைக் காண்போம்.

$$\bar{h}_Q = \Sigma\, m_i\, \rho_i \times \dot{\bar{r}}_i$$

$$= \Sigma\, m_i\, \rho_i \times \dot{\bar{P}} + \Sigma\, m_i\, P_i \times \dot{\bar{k}}$$

$$= \Sigma\, m_i\, \rho_i \times \dot{\bar{\rho}}_i + (\Sigma\, m_i \rho_i) \times \dot{\bar{k}}$$

ஆனுல் $\Sigma\, m_i\, \rho_i \times = 0$ [Q திணிவு மையம்]

$$\therefore\ \bar{h}_Q = \Sigma\, m_i\, \rho_i \times \rho$$

இங்கு $\dot{\bar{\rho}}$ என்பது P_i எனும் துகளின் Q-வைச்சார்ந்த சார்புத் திசைவேகம்.

ஆகவே, இயங்கும் விறைபொருள் தொகுதியின் அதன் திணிவு மையத்தைச் சார்ந்த சுழலுந்தம், திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தைப் பொறுத்ததல்ல. அது நிலையாக இருந்து அதனைச் சுற்றித் துகள்கள் சுழன்ருல் என்ன சுழலுந்தம் வருமோ, அதுவே, Q இயங்கும் போதும் வரும்.

குறிப்பு 6 : ஒரு விறை பொருளின் திணிவு மையம் மட்டும் இயங்கி, அதனைச் சுற்றி மற்ற துகள்கள் இயங்காமல், திணிவு மையம் போன்றே இயங்கிஞல், அத்தகைய விறை பொருள் தொகுதி, இயக்கம், 'வெறும் இடப்பெயர்ச்சி' (Pure translation) எனப்படும்

குறிப்பு 7 : திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தைப் பற்றிக் கூறும் சமன்பாடு 4-5-ல் கண்டோம். இதன் இயக்கம், அதைச் சுற்றி மற்றத் துகள்களின் இயக்கத்தால் மாறுபடுவதில்லை என்பதைக் கண்டோம். மேற்கூறிய குறிப்பில், துகள்களின் திணிவு மையத்தைச் சார்ந்த இயக்கம்—சுழலியக்கம் = திணிவு மையத்தின் இயக்கத்தைச் சார்ந்தல்ல எனவும் கண்டோம்.

இவ்வாறு இடப் பெயர்ச்சியும், சுழலியக்கமும் தனித்தனியாக ஒன்றையொன்று சாராமல் — ஒன்றை ஒன்று பாதிக்காமல் — நடை பெறுகின்றன எனும் முக்கியக் கொள்கையைச் சமன்பாடு 4-4-(i)-லிருந்தும் சமன்பாடு 4-4-(ii)-லிருந்தும் காண்கிறோம்.

விறை பொருளியக்கத்தை ஆராய வழிகோலும் முக்கிய அடிப்படையாகும் இது.

4-11. இயக்க ஆற்றல் சமன்பாடு (Equation of Kinetic Energy)

ith துகளின் திசை வேகம் $\dot{\bar{r}}_i$ ஆகவே அதன் இயக்க ஆற்றல் $\frac{1}{2} m_i \, \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}}$

∴ மொத்த இயக்க ஆற்றல் T என்றால்,

$$2T = \sum m_i \, \dot{\bar{r}}_i \cdot \dot{\bar{r}}_i$$

இப்போது $\dot{\bar{r}}_i = \dot{\bar{k}} + \dot{\bar{\rho}}_i$

[O என்பது ஆதி, P_i என்பது துகள், Q திணிவு மையம் என்றால் $\overline{OP}_i = \bar{r}_i$ $\overline{OQ} = \bar{k}$ $\overline{QP}_i = \bar{\rho}_i$.]

$$= \sum m_i \, (\dot{\bar{k}} + \dot{\bar{\rho}}_i) \cdot (\dot{\bar{k}} + \dot{\bar{\rho}}_i)$$

$$= \Sigma m_i \, \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{k}} + \Sigma m_i \, \dot{\bar{\rho}}_i \cdot \dot{\bar{\rho}}_i + 2 \dot{\bar{k}} \, \Sigma m_i \, \dot{\bar{\rho}}_i$$

ஆனால் $\Sigma m_i \dot{\bar{\rho}}_i = 0 \; \therefore \; 2T = M \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{k}} + \Sigma m_i \, \dot{\bar{\rho}}_i \, \dot{\bar{\rho}}_i$

$$\therefore \; T = \frac{1}{2} M \, \dot{\bar{k}} \cdot \dot{\bar{k}} + \frac{1}{2} \Sigma m_i \, \dot{\bar{\rho}} \cdot \dot{\bar{\rho}}_i$$

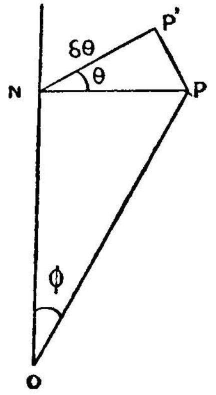
இவ்வாறு விறை பொருள் தொகுதி இயங்கும்போது அதன் இயங்கு ஆற்றல் இரண்டு உறுப்புகளின் கூடுதலாகும். ஒன்று 'இடப் பெயர்ச்சியினால்' ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல். மற்றது, திணிவு மையத்தைச் சுற்றி ஏற்படும் சுழற்சியினால் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல்.

இவ்வாறு அதன் இயங்கு ஆற்றல், மொத்தத் திணிவுடைய ஒரே துகள் திணிவு மையத்தில் அமர்ந்து இயங்குவதால் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றலும், திணிவு மையம் நிலை எனக் கொண்டு, அதைச் சார்ந்து மற்றத் துகள்கள் அதைச் சுற்றிச் சுழல்வதினால் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றலும் கூடியதாகும்.

4-12. சுழல் வேகம் (Angular Velocity)

ON எனும் அச்சைச் சுற்றி, P எனும் துகள் சுழலட்டும். 'δt' எனும் நுண்ணிய கால அளவில் P-லிருந்து P'-க்கு நகரட்டும். PN அச்சுக்குக் குத்துக்கோடாகுக.

P இயங்கிய தூரம் $NP\,\delta\theta$. $OP = r$ என்றும், $\angle NOP = \phi$ எனவும் ஆனால், இயங்கிய தூரம் $= r \sin\phi\, d\theta$



படம் 87.

O-வை ஆதியாகக் கொள்ள, P-ன் நிலை வெக்டர் $\bar{r}$ ஆகுக. இயங்கிய தூரம் $\delta\bar{r}$ • ON என்ற திசையில் அலகு வெக்டர் $\bar{e}$ ஆகுக. அப்போது $\delta\bar{r} = \delta\theta\,\bar{e} \times \bar{r}$

$$\therefore\ P\text{-ன் திசைவேகம் } \bar{v} = \frac{\delta\bar{r}}{\delta t} = \frac{\delta\theta}{\delta t}\,\bar{e} \times \bar{r}$$

$$\delta t \to 0$$

$$\therefore\ V = \dot{\theta}\,\bar{e} \times \bar{r}$$

இங்கு $\dot{\theta}\bar{e}$ எனும் வெக்டரை $\bar{w}$ எனக் குறிப்போம். அப்போது $\bar{w}$ என்பது P-ன் சுழல் வேக வெக்டர் எனப்படும்.

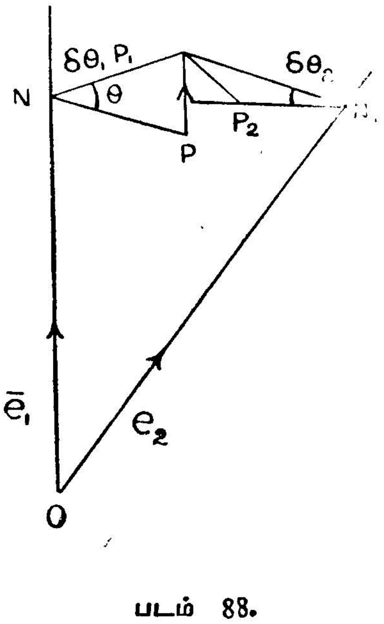
(i) $\bar{w}$ எனும் சுழல் வேகத்தின் அளவு — அதாவது

$$|\bar{w}| = \dot{\theta}$$

(ii) திசை, P இயங்கும் தளத்திற்குக் குத்தாகவுள்ளது (வலஞ்சுழி திருகு முறையைப் பின்பற்றி).

சுழல் திசைவேகம், வெக்டர் கூடுதல் முறைக்குக் கட்டுப்படும்

சுழல் அச்சுகள் O எனும் புள்ளியில் சந்தித்தால் P எனும் துகளுக்கு, இரு அச்சுகளைச் சுற்றியும் சுழற்சி ஏற்படின், முடிவிலுள்ள திசைவேகம், இரண்டு திசைவேகங்களின் வெக்டர் கூடுதலாகும் எனக் காட்டுவோம்.



படம் 88.

துகளின் நிலை O எனும் ஆதிக்கு $\bar{r}$ ஆகுக. முதற் சுழற்சி ON எனும் அச்சைச் சுற்றி $\delta\theta_1$ ஆகுக.

அப்போது துகளின் நிலை P_1 ஆகுக.

$\bar{OP}_1 = \bar{r}_1$ ஆகுக. ON திசையில் அலகு வெக்டர் e_1 என்றால்

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \delta\theta_1\, \bar{e}_1 \times \bar{r}$$

இரண்டாவது அச்சு ON_1 ஆகுக. அதன் திசையில் அலகு வெக்டர் $\bar{e}_2$ ஆகுக, இரண்டாவது சுழற்சி $\delta\theta_2$ ஆகுக. முடிவில் துகளின் P_2 என்றால் $\bar{OP}_2 = \bar{r}_{12}$ ஆகுக.

$$\therefore \quad \bar{r}_{12} = r_1 + \delta\theta_2\, \bar{e}_2 \times \bar{r}_1$$

$$= (\bar{r} + \delta\theta_1\, \bar{e}_1 + \bar{r}) + \delta\theta_2\, e_2 \times (r + \delta\theta_1\, \bar{e}_1 \times \bar{r})$$

$$= \bar{r} + \delta\theta_1\, \bar{e}_1 \times \bar{r} + \delta\theta_2\, \bar{e}_2 \times \bar{r} + \delta\theta_2\, \delta\theta_1\, \bar{e}_2 \times (\bar{e}_1 \times \bar{r})$$

ஆனால், இடப் பெயர்ச்சி மிகவும் நுண்ணியதாகவும், இரண்டாம் படி நுண்ணளவுகளைக் கணக்கில் எடுக்காவிடில்,

$$\bar{r}_{12} = \bar{r} + (\delta\theta_1\, e_1 + \delta\theta_2\, e_2) \times \bar{r}$$

இதே போல

$$\bar{r}_{21} = \bar{r} + (\delta\theta_2\, e_2 + \delta\theta_1\, \bar{e}_1) \times \bar{r}$$

$$\bar{r}_{12} = \bar{r}_{21}$$

$\therefore$ நுண் சுழற்சியில் ஏற்படும் இடப் பெயர்ச்சி வெக்டர் கூடுதலுக்குக் கட்டுப்பட்டதெனக் காண்கிறோம். ஆகையால், திசைவேகத்திற்கும் இவ்விதி பொருந்தும்.

$$\therefore \quad \dot{\bar{r}} = (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \times \bar{r}$$

குறிப்பு 1 : ஒரு விறை பொருள் சுழலும்போது அதன் இரு குறிப்பிட்ட புள்ளிகள் A, B சுழலாது இருந்தால், A, B எனும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் யாவும் சுழலாது. AB என்பது சுழல் அச்சு எனப்படும்.

குறிப்பு 2 : விறை பொருளாகையால், எனைய துகள்கள் யாவும் AB-க்குக் குத்தாகவுள்ள தளங்களில் இயங்கும் எல்லைத் துகள்களின் AB ஐச் சுற்றிய சுழல் வேகம் (Angular velocity) சமமாக இருக்கும். அது $\bar{w}$ என்போம்.

குறிப்பு 3 : AB எனும் அச்சில் O எனும் ஏதேனும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்வோம் விறை பொருளின் சுழல்வேகம் $\bar{w}$ ஆகுக. ஒரு துகளின் நிலை வெக்டர் $\bar{r}$ என்றால், துகளின் திசைவேகம் $\bar{w} \times r$ ஆகும்.

41-3. ஆற்றல் காப்புக்கொள்கை (Principle of Conservation of energy)

ஒரு துகளின் நிலை வெக்டர் $\bar{r}$ ஆகுக. அப்போது அதன் திசை வேகம் $\dot{\bar{r}}$. அதன் திணிவு m ஆகுக. இயக்க ஆற்றல் அந்த நேரத்தில் T என்றால், $T = \frac{1}{2} m \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = \frac{1}{2} mv^2$

துகள் $\bar{r}$ எனும் நிலையிலிருந்து $\bar{r} + \delta\bar{r}$ இடத்துக்கு நகரும் போது இயக்க ஆற்றல் மாறுதல் δT ஆகுக.

$$\delta T = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}}\right) = m \ddot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} \, \delta t = \bar{F} \cdot \delta\bar{r}$$

F என்பது விசை. ஆகவே, இயக்க ஆற்றல் மாறுதல் விசை செய்யும் வேலைக்குச் சமம்.

V என்பது நிலை ஆற்றல் ஆகுக.

விசைகள் காப்பு விசைகளும், ஏனைய காப்பு அற்ற விசைகளாகவும் (non-conservative forces) இருக்கலாம் காப்பு அற்ற விசைகள், இயக்கத்தில் வேலை செய்யாவிடின்,

$$\bar{F} \cdot \delta\bar{r} = \delta V$$

$$\therefore \quad \delta T = \delta V$$

$$\therefore \quad \delta(T + V) = 0$$

$$T + V = E \text{ (நிலை)}$$

ஆகவே, ஒருதுகள் காப்பு விசை செயல்பட இயங்கினால் அல்லது காப்பு அற்ற விசைகளும் இருந்து அவை வேலை செய்யாவிடின், மொத்தஆற்றல், இயக்கம் முழுவதும் மாறாதிருக்கும்

$T_0 + V_0$ என்பது t_0 என்ற நேரத்தில் மொத்த ஆற்றலும், 't' நேரத்தில் $T + V$ என்பது மொத்த ஆற்றலும் ஆனால்,

$T + V = T_0 + V_0$ எனும் 'ஆற்றல் சமன்பாடு' (energy equation) வருகிறது.

குறிப்பு: விறைப் பொருள் பிணைப்புள்ள துகள் தொகுதியிலும், பரவிய துகள் உள்ள விறைப் பொருளிலும் புறவிசைகள் காப்பு விசைகளானால் இந்தக் கொள்கை பொருந்தும் ஏனெனில் இரு துகள்களிடையே உள்ள தூரம் மாறாதிருப்பதால், உள்ளுறு விசைகள் செய்யும் வேலை பூச்சியமாகும்.

4-14. விறை பொருளின் சமதள இயக்கம்: வரையறை:

விறை பொருளின் சமதள இயக்கம் என்றால் என்ன என்பது முன்பு கூறுவம். பொருள் தொகுதியின் ஒவ்வொரு துகளும் இயங்கும்போது இணைதளங்களில் இருந்தால், அத்தகைய இயக்கம் சமதள இயக்கம் எனப்படும். $Oxyz$ என்பது ஒன்றற்கொன்று குத்தான மூன்று அச்சுகளானால் Oz எனும் அச்சை இந்தச் சமதளங்களுக்குக் குத்தாகக் கொள்வோம். அப்போது துகள்களின் z கூறு நிலையாக இருக்கும் அதன் நுண்விகிதம் பூச்சியமாகும் ஆகவே, திணிவு மையத்தின் z கூறும் நிலையாகும். x, y திசைகளின் புறவிசைகளின் பிரிவுகள் F_x F_y என்றால்,

$M\ddot{k} = F$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$M\ddot{x}_g = F_x$$

$M\ddot{y}_g = F_y$ என இரு சமன்பாடுகள் வருகின்றன. இங்கு M என்பது விறை பொருளின் திணிவு. x_g y_g என்பது 't' நேரத்தில் திணிவு மையத்தின் x, y கூறுகளாம். இவை இடப்பெயர்ச்சிச் சமன்பாடுகளாகும்.

4-15. 'சுழற்சிச்' சமன்பாடுகள் (Equations due to rotations)

இத்தகைய இயக்கத்தில் திணிவுமையம் வழி z அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள கோட்டைச் சுற்றித் துகள்கள் சுழல்கின்றன. ith துகளின் z அச்சிலிருந்துள்ள தூரம் 'r' ஆகுக. அதன் கோண வேகம் $\dot{\theta}$ ஆகுக. துகளின் வேகம் $r\dot{\theta}$

$\therefore$ அச்சைச்சுற்றிய சுழலுந்தம் $mr^2\dot{\theta}$

∴ எல்லாத்துகள்களுக்கும் $\dot{\theta}$ ஒன்றே ஆதலால் சுழல் உந்தக்கூடுதல் $\dot{\theta}\ \Sigma\, mr^2 = I\,\dot{\theta}$

இங்கு I என்பது சுழலச்சைச் சார்ந்த விறைபொருளின் நிலைம திருப்புத்திறன்

ஆனால் $\dot{h}_\theta = G_\theta$ என்பது பொதுச் சமன்பாடு. $\dot{h}_\theta$-ன் z பிரிவு $\dot{h}_z$ என்றால்

$$\dot{h}_z = I\,\ddot{\theta}$$

அதுபோல G_θ இன் z பிரிவு G_z என்றால்,

$I\,\ddot{\theta} = G_z$ எனும் சமன்பாடு வருகிறது. அதாவது புற விசைகளின், திணிவு மையம் Q வழி z அச்சைச்சுற்றிய, அல்லது z வழி தளத்துக்குக் குத்தான கோட்டைச்சார்ந்த சுழல்திறன், சுழல் உந்த மாறுதல் வீதத்திற்குச் சமம்.

குறிப்பு 1 : சுழல்திறன் பூச்சியம் என்றால், சுழல் உந்தம் $I\dot{\theta}$ நிலை எண்ணாகும்.

குறிப்பு 2 : திணிவுமையம் அல்லாத வேறு ஒரு நிலைப் புள்ளியையோ, அல்லது திணிவுமையத்திற்கு இணையாக அதனுடன் நகரும் புள்ளியைக் கொண்டாலும் இந்தச் சமன்பாடு பொருந்தும். அப்போது I என்பது, அந்தப் புள்ளிவழி z அச்சுக்கு இணையாகவுள்ள கோட்டைச்சார்ந்த நிலைம திருப்பு திறனாகும்.

4-16. ஆற்றல் சமன்பாடு

't' நேரத்தில் திணிவு மையத்தின் கூறுகள் $(x_g\ y_g\ z)$ ஆகுக. அதன் திசைவேகம் பிரிவுகள் $(\dot{x}_g\ \dot{y}_g)$. ஆகவே விறை பொருளின் இடப்பெயர்ச்சியால் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல் $\Sigma\, V(\dot{x}_g^2 + \dot{y}_g)^2$ அல்லது $M\,V^2$ எனலாம். இவை 'இடப்பெயர்ச்சிச்' சமன்பாடுகளாகும்.

சுழற்சிச் சமன்பாடுகள் (Equations due to rotation)

சமதள இயக்கத்தில், z அச்சைச் சுற்றி துகள்கள் சுழல்கின்றன. O என்பது ஆதியானால்,

சுழலுந்தம் $\bar{h} = m\bar{r} \times \bar{v}$

துகள்களின் கூறுகள் (x, y, z)

$$\bar{r} = (x, y, z)$$

$$\bar{v} = \dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}, 0)$$

$$\therefore \quad \bar{h} = m(-\dot{y}z, \dot{x}z, x\dot{y} - \dot{x}y)$$

$$\therefore \quad \dot{\bar{h}} = m(-\ddot{y}z\ \ddot{x}z\ \ x\ddot{y} - \ddot{x}y)$$

சுழற்சியால் ஏற்படும் இயங்கு ஆற்றல்

$$\Sigma mr^2 \dot{\theta}^2 = \dot{\theta}^2 \Sigma mr^2 = I\dot{\theta}$$

ஆகவே மொத்த இயங்கு ஆற்றல் $T = Mv^2 + I\dot{\theta}^2$.

இதை $T + V = T_0 + V_0$ எனும் சமன்பாட்டில் பயன் படுத்தலாம். வேலை செய்யும் புறவிசை புவியீர்ப்பு விசை மட்டு மானல் $V = Mgz$ எனவரும். இங்கு z என்பது z கூறு ஆகும்.

இவ்வாறு விறை பொருள் இயக்கத்தை ஆராயத்தேவையான பொது அடிப்படைகளையும், குறிப்பாக சமதள இயக்கத்தில் வரும் சமன்பாடுகளையும் கூறினேம். பின்னர் இவை பயன்படும் கணக்குகளைக் காண்போம்.

4-17. சமதள இயக்கக் கணக்குகள்

கணக்கு 1 :

ஒரு வட்டத்தகடு, ஒரு சாய்வுதளத்தின் மேலிருந்து அதன் தளம் நிலைத்தளத்திலிருக்குமாறு, நேராகக் கீழே உருண்டு வருகிறது. சாய்வுதளம், கிடைத்தளத்துடன் 'α' கோணச் சாய்வில் உள்ளது. அதன் இயக்கத்தை ஆராய்க (வட்ட ஆரம் 'a').

(i) தகட்டின் நிலை : (t-நேரத்தில்)

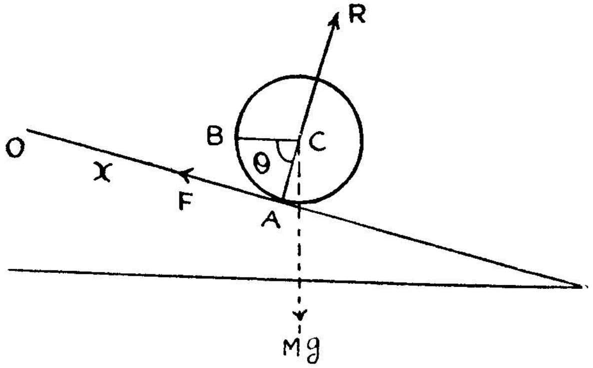
தளத்தில் O எனும் புள்ளியை ஆதியாகக் கொள்வோம்.

OA, எனும் தளத்தை நிலைத்தளம் வெட்டும் கோடு x அச்சு ஆகுக. C என்பது தகட்டின் மையம் ஆகுக. தளத்தைத் தகடு A-ல் தொடட்டும். அப்போது ஆரம் $CA \perp^r OA$. தகட்டில் உள்ள ஒரு குறிப்பிட்ட ஆரம் CA-வுடன் θ சாய்வில் இருக்கட்டும்.

$OA = x$ ஆகுக.

∴ C-ன் x கூறு x.

இவ்வாறு தகட்டின் நிலையை, x, θ எனும் எண்கள் நிச்சயிக்கின்றன. நேரம் $t = 0$ எனும் போது O எனும் புள்ளியில் தகடு தொடட்டும். x அது உருண்ட தூரம் $OA = x$ தகடு சறுக்காமல், முற்றிலும் உருள்வதால் $OA =$ வில் AB



படம் 89.

∴ $x = a\theta$

[$t = 0$ எனும் போது B, O உடன் பொருந்தும்.]

இவ்வாறு இரு எண்களும் தொடர்புடையன.

(ii) புற விசைகள்

(a) திணிவு மையம் வட்ட மையம் C வழி புவியீர்ப்பு விசை mg நேர்கீழாகச் செயல்படுகிறது. (b) A-ல் AC திசையில் தளத்தின் தாங்கு விசை k செயல்படுகிறது, (c) உராய்வு விசையால் தகடு உருள்கிறது. உராய்வு விசை F, AO எனும் திசையில் செயல்படட்டும்.

(iii) சமன்பாடுகள்

இடப்பெயர்ச்சிச் சமன்பாடு : C-ன் முடுக்கம் $\ddot{x}$

(i) $m\ddot{x} = -F + mg \sin \alpha$ ...... (1)

தளத்திற்குக் குத்தாக $O = k - mg \cos \alpha$ ...... (2)

சுழற்சிச் சமன்பாடு :

C வழியுள்ள, OA-க் குத்தாகக் கிடைத்தள அச்சைச் சுற்றி தகடு சுழல்கிறது.

$$\therefore \quad I\ddot{\theta} = Fa \qquad \ldots\ldots (3)$$

இம் மூன்று சமன்பாடுகளும் தகட்டின் இயக்கத்தைத் தருகின்றன.

(iv) கணக்கு செய்தல் (Manipulations)

(1), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$m\ddot{x} = -I\frac{\ddot{\theta}}{a} + mg\sin\alpha$$

ஆனல் $a\ddot{\theta} = \ddot{x} \qquad \therefore \quad \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{a}$

$$\therefore \quad m\ddot{x} = -I\frac{\ddot{x}}{a^2} + mg\sin\alpha$$

$$\therefore \quad \ddot{x}\left[1 + \frac{I}{ma^2}\right] = g\sin\alpha$$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{ma^2}}$$

இவ்வாறு திணிவு மைய்த்தின் முடுக்க மதிப்பு காண்கிறோம்.

தகட்டுக்கு $I = \frac{ma^2}{2}$.

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{2g\sin\alpha}{3}$$

திண்ம உருளைக்கும் இதுவே முடுக்கம்.

குறிப்பு : (i) ஒரு புரைக்கோளமானல்,

$I = \frac{2ma^2}{3}$ அப்போது $\ddot{x} = \frac{3g\sin\alpha}{5}$

(ii) திண்மக் கோளமானல் $I = \frac{2ma^2}{5}$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{5 g \sin \alpha}{7}$$

(iii) வட்டவளையமோ, உருளைக்குழாயோ என்றால் $I = ma^2$

$$\therefore \quad \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{2}$$

குறிப்பு : மைய முடுக்கம் ஆரத்தைச் சார்ந்ததல்ல எனக் காண்கிறோம்.

$$k = mg \cos \alpha \qquad F = m(g \sin \alpha - \ddot{x})$$

$$\therefore \quad F = m \left(g \sin \alpha - \frac{a^2 g \sin \alpha}{a^2 + k^2} \right) \quad [I = mk^2]$$

$$= \frac{mg \sin \alpha}{a^2 + k^2} \cdot k^2$$

$$\therefore \quad \frac{F}{k} = \frac{g \sin \alpha \, k^2}{(a^2 + k^2) \, g \tan \alpha} = \frac{k^2}{a^2 + k^2} \tan \alpha$$

தகடு உருள்வதற்கு $\frac{F}{k} \leq \mu$ என இருக்கவேண்டும். μ என்பது எல்லை உராய்வுக் குணகம். λ என்பது எல்லை உராய்வுக் கோணமானால் $\mu = \tan \lambda$.

$\therefore \quad k^2 \tan \alpha \leq \mu (a^2 + k^2)$ என தளத்தின் சாய்வு கோணம் இருந்தால் மட்டுமே தகடு சறுக்காமல் உருளும்.

குறிப்பு : வட்டத்தகட்டின் முடுக்கம் காண, ஆற்றல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தலாம். இங்குத் தகடு உருள்வதால் உராய்வு விசை வேலை செய்வதில்லை.

$$\text{'இடப்பெயர்ச்சியால்' உள்ள ஆற்றல்} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$\text{'சுழற்சியால்' உள்ள ஆற்றல்} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$\therefore \quad \text{இயங்கு ஆற்றல் } T = \frac{1}{2} [m\dot{x}^2 + I\dot{\theta}^2]$$

நிலை ஆற்றல் $V = -mgx \sin \alpha$

[A-லிருந்த பொழுதுள்ள நிலைக்கு C-ன் ஆழம்.]

$$\therefore \frac{1}{2}[m\dot{x}^2 + I\dot{\theta}^2] - mgx \sin \alpha = T_0 + V_0 = 0$$

ஆனால் $\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{x}^2}{a^2}$

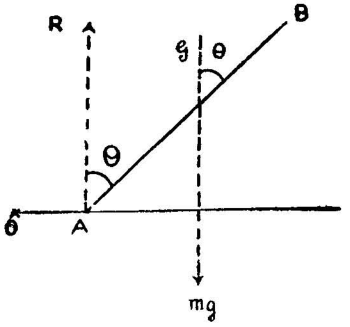
$$\therefore \frac{1}{2}\dot{x}^2\left[m + \frac{I}{a^2}\right] = mgx \sin \alpha$$

$$\therefore \frac{1}{2} 2\dot{x}\ddot{x}\left[m + \frac{I}{a^2}\right] = mg\dot{x} \sin \alpha \qquad I = mk^2$$

$$\therefore \ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{\left[1 + \frac{k^2}{a^2}\right]}$$

கணக்கு 2

ஒரு வழவழப்பான தரைமீது l நீளமுள்ள கோல் நேர்குத்தாக வைக்கப்படுகிறது. நிலைத்தளத்தில் அதைச் சற்று சாய்த்து



படம் 90.

விட்டால், தரையுடன் ஒன்றும்போது என்ன கோணவேகத்துடன் விழுகிறது?

AB என்பது கோலாகுக. அதன் திணிவு மையம் G ஆகுக. OA என்பது தரை.

O வை ஆதியாகவும், CA வை x அச்சாகவும் O-வில் குத்துக் கோட்டை y அச்சாகவும் கொள்வோம்.

't' நேரத்தில் கோலின் நிலை

G-ன் கூறுகள் (x, y) ஆகுக. நிலைக்கோட்டுடன் கோலின் சாய்வு θ ஆகுக. $t = 0$ எனும்போது $x = a$; $y = \frac{l}{2}$; $\theta = 0$ என ஆகுக.

இயக்கச் சமன்பாடுகள்

விசைகள், Gல் நேர்கீழாக mg-ம் A-ல் நேர்மேலாகத் தாங்குவிசை R-ம் செயல்படுகின்றன, x திசையில் விசையில்லை.

$$\therefore \quad m\ddot{x} = 0 \qquad \therefore \quad \dot{x} = 0 \qquad x = a$$

அதாவது G-ன் x கூறு மாறுவதில்லை. G-ன் இயக்கம் நேர் கீழ்க்கோட்டில் உள்ளது. இங்கு தரையுடன் கோல் ஒன்றுகும் போது $\dot{\theta}$-ன் மதிப்பு தேவையாதாலால், ஆற்றல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

இடப்பெயர்ச்சியால் உள்ள இயங்கு ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m\dot{y}^2$

சுழற்சியால் உள்ள ஆற்றல் $= \frac{1}{2} m \frac{l^2}{12} \dot{\theta}^2$

நிலையாற்றல் $= mgl \cos\theta$

$t = 0$ எனும்போது $\dot{y} = 0 \qquad \dot{\theta} = 0 \qquad \theta = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{12} + mgl \cos\theta = mgl$$

$$\therefore \quad \dot{y}^2 + \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{12} + 2gl \cos\theta = 2gl$$

ஆனால் $y = \frac{l}{2} \cos\theta$

$$\therefore\ \dot{y} = -\frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\therefore\ \frac{l^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{l^2\dot{\theta}^2}{12} + 2\,gl\cos\theta = 2gl$$

தரையுடன் ஒன்றும்போது $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\dot{\theta} = w$ ஆகுக.

$$\therefore\ \frac{l^2}{4}w^2 + \frac{l^2 w^2}{12} = 2\,gl$$

$$\therefore\ 4\,l^2 w^2 = 24\,gl$$

$$\therefore\ w^2 = 6\frac{g}{l}$$

$$w = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

மேற்கோள் நூல்களின் பட்டியல்

(LIST OF REFERENCE BOOKS)

Hydrostatics

Ramsey — Hydrostatics

G.M. Minchin — Hydrostatics

Statics

Loney — Statics

Minchin — Statics

Dynamics

Loney — Elementary treatise on the Dynamics of a particle and rigid body

Rutherford — Classical Mechanics (Oliver Boyd)

Synge and Griffith — Principles of Mechanics

Chorlton — Dynamics

கலைச்சொற்கள்

1. திரவ நிலையியல்

அமுக்கம், செங்குத்து	—	Normal stress
„ „ வெட்டு	—	Shearing „
„ „ மொத்த	—	Thrust
அழுத்தம்	—	Pressure
அழுத்த மையம்	—	Centre of Pressure
திரவ நிலையியல்	—	Hydrostatics
திரவம்	—	Fluid
திரவம் காற்றியல்	—	Gases
„ „ நீரியல்	—	Liquid
„ „ குறையிலா	—	Perfect fluid
மிதவைக்காப்புப்புள்ளி	—	Meta centre
மிதவை மையம்	—	Centre of Buoyancy

2. நிலையியல்

உத்திரம்	— Beam
உருள் தொடுகை	— Rolling Contact
கற்பித வேலைத் தத்துவம்	— Principle of Virtual work
சமவிசைத் தொகுதி	— Equivalent system of forces
சங்கிலியம்	— Strings or chain, catenary
திரிபு	— Strain
திருகு	— Wrench
திருகின் புரியிடை	— Pitch of the wrench
பிணைப்புகள்	— Constraints
மாறாத் தலம்	— Neutral axis
மாறாக் கணியங்கள்	— Invariants
மைய அச்சு	— Central axis
வளைவு திருப்பு திறன்	— Bending moment
விசையின் இடம் மாறு கொள்கை	— Principle of transmissibility of force